

УЧЕБНИКИ, ДИПЛОМЫ, ДИССЕРТАЦИИ -  
полные тексты

На сайте электронной библиотеки  
[www.учебники.информ2000.рф](http://www.учебники.информ2000.рф)

НАПИСАНИЕ на ЗАКАЗ:

1. Диссертации и научные работы
2. Дипломы, курсовые, рефераты, чертежи...
3. Школьные задания

Онлайн-консультации

ЛЮБАЯ тематика, в том числе ТЕХНИКА

Приглашаем авторов

на заказ

.shtml

арусь

ИТЕТ

**П.В.СЕВАСТЬЯНОВ**

## **ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА И МОДЕЛИ ИНВЕСТИЦИЙ**

Курс лекций  
по одноименному спецкурсу  
для студентов специальности  
Н 01.01.00 «Математика»

**[Рерайт \(переделка\) дипломных и курсовых работ](#)**

**[Создание интернет-магазинов](#)**

**[Вернуться в каталог учебников](#)**

Гродно 2001

**[Дистанционное обучение созданию сайтов](#)**

Вернуться в каталог учебников  
<http://учебники.информ2000.рф/учебники.shtml>

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

<http://учебники.информ2000.рф/napisat-diplom.html>

**Материалы по экономике и менеджменту**

УДК 330.4:332.146(075.8)

ББК 65

С28

Рецензенты: директор Института Математики и Информатики Политехники Ченстоховской (Республика Польша), доктор технических наук, профессор Б. Мохнацкий;

доцент кафедры дифференциальных уравнений и оптимального управления ГрГУ им. Я.Купалы, кандидат физико-математических наук В.И.Булгаков.

Рекомендовано советом математического факультета ГрГУ им. Я. Купалы.

### **Севастьянов П.В.**

Финансовая математика и модели инвестиций: Курс лекций / С28 П.В.Севастьянов. — Гродно: ГрГУ, 2001. — 183 с.

ISBN 985-417-306-2.

Курс лекций предназначен для студентов математических специальностей, дальнейшая профессиональная деятельность которых будет связана с решением экономико-математических и финансовых проблем на предприятиях различного профиля. Особое внимание в курсе лекций уделено алгоритмической стороне вопросов, а также учету неопределенностей. При этом наряду с традиционным теоретико-вероятностным подходом к математической формализации неопределенных данных рассматриваются современные методы интервальной математики и теории нечетких множеств.

УДК 330.4:332.146(075.8)

ББК 65

ISBN 985-417-306-2.

© Севастьянов П.В., 2001

## ВВЕДЕНИЕ

Финансовая математика в чисто математическом отношении не представляет собой ничего особо сложного для студентов-математиков. Самые сложные в математическом плане задачи возникают в связи с проблемами оценки эффективности опционов, когда приходится решать стохастические дифференциальные уравнения в частных производных или задачи оптимизации инвестиций, как правило, вполне посильны для студентов.

Эта математическая прозрачность служит причиной поверхностного восприятия многими специалистами, уже работающими в финансовой сфере, экономической сущности решаемых задач, что является причиной многочисленных ошибок (изобилующих также в учебниках по финансовому анализу), которые зачастую приводят к катастрофическим результатам. Поэтому в настоящем курсе предусмотрен анализ большого числа примеров из живой практики применения финансовой математики.

Поскольку в настоящем курсе финансовая математика рассматривается как инструмент для решения реальных задач финансового анализа, предусмотрено рассмотрение практических вопросов, связанных со спецификой законодательства Республики Беларусь, бизнес-планирования и пр.

В большинстве случаев финансовая математика применяется для оценки эффективности инвестиций. Поскольку при этом речь идет о возможности реализации тех или иных событий в будущем, неизбежно проявляются неопределенности различного типа, игнорирование которых делает решаемую задачу слишком далекой от реальности. Поэтому в настоящем курсе вопросам учета неопределенностей уделяется большое внимание. При этом наряду с классическим теоретико-вероятностным подходом к математической формализации неопределенностей рассматриваются методы их анализа с использованием элементов теории нечетких множеств.

Таким образом, целью предлагаемого курса лекций является привитие студентам навыков постановки задач инвестиционного анализа, проведения финансово-экономических расчетов для оптимального управления инвестициями, разработки необходимого для этого программного обеспечения.

## ЛЕКЦИЯ 1. ФИНАНСОВЫЙ РЫНОК И ЕГО ТОВАРЫ

Финансовый рынок — это рынок, где товарами являются сами деньги и ценные (денежные) бумаги. Прежде чем трактовать смысл этих понятий, определим роль финансового рынка в общей системе рыночной экономики.

### 1.1. Товарно-денежный механизм рыночной экономики

Движение товара можно рассматривать с момента окончания его производства какой-либо организацией, после чего товар продается либо другому предприятию, если это товар производственного назначения, либо организациям, осуществляющим оптовую торговлю, если это товар потребительского назначения. Зачастую и массовые производственные товары, в особенности сырьевые (нефть, металл, зерно), также направляются другим предприятиям посредством оптовой торговли, осуществляемой товарными биржами. Оптовые торговцы потребительским товаром реализуют его потребителям через систему розничной торговли.

При любом из указанных перемещений товар переходит от одного собственника к другому, и движение товара приводит к встречному потоку денежных выплат. За исключением, возможно, самого нижнего звена, эти денежные выплаты осуществляются в безналичной форме, причем с участием посредника, каковым является тот или иной банк. В банках же накапливается наличная выручка розничной торговли и сферы обслуживания, которая в свою очередь возвращается на предприятия и в систему социальной защиты, где используется при выплате зарплаты и социальных пособий. Впрочем, и в этом нижнем звене все чаще используются безналичные средства в виде различного рода кредитных карточек.

Наряду с розничной торговлей и сферой обслуживания существенную роль в аккумуляции денежных сумм играют страховые компании, осуществляющие страхование жизни и имущества в различных формах. Государственную систему социального страхования во многих странах существенно дополняют специальные пенсионные фонды, куда собираются взно-

сы, представляющие собой часть зарплаты, откладываемую работниками для формирования добавочных пенсий, а также взносы предприятий на поддержку этих пенсий для своих бывших работников.

Вернемся к производству продукта на предприятии. Основная особенность реального процесса производства — несовпадение по времени затрат, связанных с производством, и дохода в результате продажи полученной продукции. Поэтому предприятие нуждается в авансировании денежных средств, которые после реализации продукции вернутся на предприятие в большем объеме, но через некоторое время. Предприятие может иметь собственный оборотный капитал, но, как правило, ему приходится обращаться за финансовой поддержкой в банк, который передает ему необходимые средства в виде займа. Естественно, что этот заем дается под процент. Иначе говоря, предприятие вынуждено делиться частью прибыли с банком, что является еще одним источником пополнения банковских средств.

Особенно большие затраты связаны не с текущей деятельностью, а с организацией нового производства или с существенным расширением или переоснащением старого. В этом случае предприниматель особенно нуждается в предоставлении ему банковских кредитов.

В свою очередь коммерческие банки, конечно, заинтересованы в получении доходов от кредитования и затрачивают на это большие суммы — причем не столько из собственного капитала, сколько из сумм, которые им временно переданы для сбережения и которые могут быть затребованы вкладчиками в любой момент. Поэтому возможна ситуация, когда требование вкладчика не удастся удовлетворить — в этом случае коммерческие банки вынуждены сами брать деньги в долг у других банков, и в первую очередь у государственных банков, являющихся прежде всего банками для банкиров и составляющих так называемую государственную резервную систему.

Следует упомянуть, что в государственных банках аккумулируются средства, поступающие от населения и предприятий в виде различного рода налогов. С другой стороны, через государственные (или муниципальные) банки осуществляет-

ся выплата социальных пособий, средств служащим государственных учреждений, в частности вооруженных сил, милиции и т.п. Поскольку размер этих выплат определяется не только и не столько экономическими, сколько политическими соображениями, то, как правило, он превышает сумму налоговых поступлений. Для покрытия разницы государство использует две схемы.

Первая — дополнительная эмиссия денежных знаков, вызывающая снижение их реальной ценности, инфляцию и, в конечном счете, перераспределение государственного дефицита на все население. Важно понимать, что и денежные знаки являются лишь документами-обязательствами, реальная ценность которых определяется рыночным механизмом.

Вторая схема состоит в выпуске государственных займов и распространении облигаций займов среди населения. При этом государство как бы перекладывает свой долг на плечи покупателей облигаций, но берет на себя обязательство (слово «облигация» и означает «обязательство») выплачивать процент на вложенные инвестором-покупателем деньги.

Таким образом, существует целая иерархическая банковская структура, взаимоотношения между элементами которой также строятся на кредитно-денежной основе.

Весьма важным фактором является то, что предприятие (или группа предприятий), заинтересованное в получении средств для капитальных вложений в производство, может не только обратиться в банк за займом, но использовать и другую форму привлечения капитала — путем организации в той или иной форме акционерного общества. Организаторы акционерного общества, распространяя акции, привлекают к акционерному предприятию других собственников в качестве совладельцев. Каждая акция является документом, удостоверяющим право на владение определенной долей имущества акционерной компании. Это право в некотором смысле условно, но каждая акция является документом, по которому акционер может регулярно (раз в квартал или в год) получать некоторые денежные выплаты из прибыли компании,

называемые дивидендами. Кроме того, любая акция может быть передана другому лицу за определенную денежную сумму, называемую ценой акции, т.е. сама акция представляет собой товар, который может быть продан или куплен.

Продажа и покупка акций реализуются с помощью банков либо с помощью иных посредников (брокеров и дилеров), крупнейшие из которых объединяются, организуя фондовые биржи.

Важно понимать, что уровень дивидендов не является фиксированным.

Более того, цена акции на рынке меняется, как меняется цена любого товара на рынке. Вкладчик, купив акцию, может выиграть существенно больше на ее продаже после подъема курса, чем за счет получения дивидендов, но может и потерять, если курс понизился.

Поэтому вклад денег в покупку акций всегда содержит в себе элемент риска, игры, и в этой игре выигрывает только богатый игрок, который может купить большое количество разнообразных акций, обеспечить себя информацией и средствами ее обработки.

В развитых странах лишь немногие лица рискуют самостоятельно покупать и продавать акции через биржу.

Наиболее распространенной формой вложений являются косвенные вложения через специальные инвестиционные фонды, которые осуществляют покупку акций на сделанные в них денежные вклады и текущую перепродажу акций с целью изменения поддерживаемого инвестиционным фондом портфеля (набора) акций. Пайщики инвестиционного фонда получают свою долю дивидендов от всего портфеля акций.

Инвестиционный фонд должен содержать специальную службу финансовых аналитиков, занимающихся прогнозированием рыночных процессов и дающих рекомендации по изменению количества и видов акций в портфеле этого фонда. Естественно, что за такие услуги инвестиционный фонд берет определенную плату с пайщиков, но это окупается за счет более рациональных капвложений.

## 1.2. Товары, субъекты и структура финансового рынка

Главными товарами финансового рынка являются: наличные деньги, в том числе внутренняя и иностранная валюта; банковские кредиты; ценные бумаги.

В соответствии с этими понятиями принято разделять финансовый рынок на денежный рынок и рынок капитала, а рынок капитала — на кредитный и фондовый рынки. Основным объектом рассмотрения в этой книге является фондовый рынок, или *security market*; слово «*security*» эквивалентно русскому «ценные бумаги». Перечислим важнейшие виды ценных бумаг.

**Долговые обязательства (облигации).** Все ценные бумаги такого рода происходят от простой расписки, удостоверяющей, что одно лицо (кредитор) предоставил другому лицу (дебитору) определенную сумму денег с фиксированными оговоренными условиями возврата. Зачастую их именуют ценными бумагами с фиксированным доходом (*fixed income securities*), хотя это не вполне точно. Часть ценных бумаг удостоверяет взаимные обязательства только двух сторон и имеет силу только в их взаимоотношениях, однако наибольший интерес представляют ценные бумаги, которые кредитор может свободно продавать другим лицам. Именно они составляют основную массу средств, обращающихся на фондовом рынке.

**Акции** — это ценные бумаги, удостоверяющие право их владельца на долю собственности акционерной компании, включая право на участие путем голосования в принятии основных решений и право на получение дивидендов из прибыли компании. Акции компании открытого типа являются свободно продаваемыми и покупаемыми и представляют собой наиболее активную часть фондового рынка.

**Контракты на поставку в будущем (фьючерсы, *futures*)** — это обязательство продавца поставить к определенной дате определенное количество товара в определенное место. Под товаром могут пониматься реальный товар (зерно, мясо, нефть и т.п.) либо иные ценные бумаги, например, акции.

Вместе с тем, фьючерс сам по себе является товаром на фондовом рынке и вплоть до даты исполнения может продаваться и покупаться.



**Опционы на поставку в будущем (options)** — это ценные бумаги, удостоверяющие право владельца совершить покупку определенного количества товара по фиксированной цене или продать товар по фиксированной цене в определенный момент времени (европейский опцион) или вплоть до определенного момента (американский опцион).

Поскольку цены контрактов и опционов зависят от цен фигурирующих в них товаров, то их часто называют **производными ценными бумагами**.

Субъектами, действующими лицами на фондовом рынке, являются: эмитенты, т.е. организации, выпускающие ценные бумаги; инвесторы, т.е. владельцы, вкладывающие капитал в ценные бумаги; посредники, осуществляющие продвижение ценных бумаг от эмитентов к инвесторам.

Подчеркнем, что одни и те же физические и юридические лица могут выступать в роли и эмитента, и инвестора, и посредника.

В качестве посредников в основном выступают брокерские конторы, фондовые биржи, инвестиционные фонды, а в ряде стран, в том числе и в России, в этом отношении чрезвычайно активны банки.

При всей сложности и разнообразии финансового рынка надо отчетливо осознавать, что любой его участник преследует одну цель — преумножение капитала. Лицо, покупающее ценные бумаги, вкладывает деньги, инвестирует свой капитал в надежде получить доход в будущем. Лицо, продающее ценные бумаги, вкладывает полученные деньги либо в производство, либо в покупку реального товара, либо в покупку иных ценных бумаг для получения дохода, который не только позволит выполнить обязательства перед покупателем, но и получить прибыль для себя. Развитая рыночная экономика предоставляет возможность каждому гражданину решить, куда вложить деньги. Разнообразие возможностей делает этот выбор особенно сложным, и решение данной проблемы представляет собой предмет данной дисциплины.

### 1.3. Современное состояние финансового рынка в Республики Беларусь

Роль финансового рынка в экономике Республики Беларусь в настоящее время существенно снижена из-за жесткого контроля государства за рынком в целом и деятельностью банков в частности. Эта особенность определяет основные отличительные черты финансового рынка Республики Беларусь:

- 1) высокие темпы инфляции;
- 2) на фоне низкой инвестиционной активности вообще практически все инвестиции осуществляются банками;
- 3) фактическое отсутствие вторичного рынка ценных бумаг;
- 4) сильная зависимость от состояния российского финансового рынка.

Важно сознавать, что выход из кризиса должен будет сопровождаться уменьшением роли государства в контроле над финансовым рынком, а следовательно, его либерализацией и развитием денежных рынков и рынков капитала.

## ЛЕКЦИЯ 2. ХАРАКТЕРИСТИКИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ

Каждая ценная бумага удостоверяет определенную финансовую операцию. Лица, участвующие в операции (сделке), должны четко представлять ее результаты, выгодность и эффективность. Существуют общие схемы и понятия, позволяющие определить эффективность операции, сравнить различные операции и выбрать наиболее эффективные из них.

### 2.1. Основные термины и их толкование

Простейший вид финансовой сделки — однократное предоставление в долг некоторой суммы  $S(0)$  с условием, что через время  $T$  будет возвращена сумма  $S(T)$ . Для определения эффективности сделки используют две величины:

- а) относительный рост (интерес, interest rate, return. Термины interest и return по существу эквивалентны. Для обозначения используют буквы « $i$ » или « $r$ »)

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} \quad (2.1)$$

и б) относительную скидку (дисконт, discount rate)

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}. \quad (2.2)$$

Обе величины характеризуют приращение капитала кредитора, отнесенное либо к начальному вкладу (интерес), либо к конечной сумме (дисконт). Очевидно, что все введенные величины взаимосвязаны:

$$r_T = \frac{d_T}{1 - d_T}, \quad d_T = \frac{r_T}{1 + r_T}$$

$$S(T) = S(0)(1 + r_T); \quad S(0) = S(T)(1 - d_T). \quad (2.3)$$

Последние формулы показывают, что сделку удобнее характеризовать либо как «начальная сумма – интерес», либо как «конечная сумма — дисконт». Иногда вместо дисконта используют дисконт — фактор (discount factor)

$$V_T = 1 - d_T = \frac{S(0)}{S(T)} = \frac{1}{(1 + r_T)}. \quad (2.4)$$

Как правило, и рост, и дисконт выражают в процентах, умножая соответствующие величины на 100. Эта традиция настолько сильна, что вместо термина «рост» часто говорят «ставка процента». Ценные бумаги, удостоверяющие долговые обязательства, называют процентными, а ростовщика — процентщиком.

*Пример 1.* Кредит выдан на 1 год в сумме 1 млн руб. с условием возврата 2 млн руб. — в этом случае интерес равен 100%, а дисконт — 50%. Если кредит выдан на сумму 3 млн руб. со ставкой 50%, то через год придется вернуть 4,5 млн руб. Если же кредит выдан с условием возврата через год 3 млн руб. и дисконтом 20%, то дебитор получит 2,4 млн руб. При этом дисконт — фактор равен 0,8.

## 2.2. Приведение к базовому периоду

Обычно в условиях сделки указывают интерес и дисконт за базовый период, равный году, а соответствующие величины за фактический период  $T$  вычисляют по некоторым стандартным правилам, также оговариваемым в условиях.

На практике используют схему простых процентов (simple interest), сложных процентов (compound interest) и их комбинации.

Приведение с помощью простых процентов используется в практике банковских расчетов за краткосрочные кредиты меньше 1 года.

Пусть годовой интерес (ставка) задан равным  $r$ . Тогда по формуле простых процентов

$$r_T = Tr.$$

При этом надо учитывать принятые условности, иногда неявно оговариваемые в сделке. Если длительность краткосрочного кредита измеряется в днях, то длительность года также в днях, но используют либо точную длительность (365 или 366 дней), либо, более часто, приближенную (360 дней или 12 месяцев, имеющих условно равную длительность в 30 дней). Таким же образом приближенно учитывают и длительность ссуды, считая все полные месяцы равными 30 дням.

*Пример 2.* Выдан кредит в сумме 1 млн руб. с 15.01.93 по 15.03.93 г. под 120% годовых. Сумма погасительного платежа может быть различной в зависимости от условий. Если расчет ведется точно, то

$$S(T) = 1 \cdot (1 + r_T) = (1 + 59/365 \cdot 1,2) = 1 \text{ млн } 193 \text{ тыс. } 972 \text{ руб.}$$

Если приблизительно, то

$$S(T) = 1 \cdot (1 + r_T) = 1 + 60 / 360 \cdot 1,2 = 1,2 \text{ млн руб.}$$

(учитываются 30 дней февраля, 16 дней января, 15 дней марта минус 1 день).

При расчетах по долгосрочным кредитам, охватывающих несколько полных лет, используют схему сложных процентов по формуле

$$1 + r_T = (1 + r)^T.$$

Эти две схемы можно согласовать, если предположить, что по истечении каждого года кредитор (вкладчик капитала) изымает капитал вместе с накопленными процентами, а потом вновь отдает в рост всю накопленную сумму. В результате на вложенный рубль через 1 год будет получено  $1 + r$ , через 2 —  $(1 + r)^2$  и т.д., что и дает доход, исчисленный по формуле сложных процентов. Во избежание процедуры изъятия и повторного вклада обе стороны сделки заранее договариваются об использовании сложных процентов.

Применяя повторные вложения (реинвестирование), кредитор может получить некоторый выигрыш, даже если объявленные условия не содержат схемы сложных процентов.

*Пример 3.* Сберегательный банк принимает вклад 100 тыс. руб. на срок 3 месяца с объявленной 100%-й годовой ставкой или на 6 месяцев под 110%. На первый взгляд, вкладчику более выгоден второй вариант, когда через 6 месяцев будет получено

$$100(1 + 6/12 \cdot 1,1) = 155 \text{ тыс. руб.}$$

В действительности же, дважды используя 3-месячный депозит, можно получить

$$100(1 + 3/12 \cdot 1,0)(1 + 3/12 \cdot 1,0) = 100 \cdot 1,25^2 = 156,25 \text{ тыс. руб.}$$

Если период платежа превышает 1 год, но насчитывает нецелое число лет, то сберегательные банки применяют комбинированную схему: сложные проценты — за целое число лет, простые — за остаток. Иначе говоря, если объявлена годовая ставка  $r$ , то

$$1 + r_T = (1 + r)^{[T]}(1 + r \cdot t), \quad t = T - [T], \quad (2.5)$$

где квадратной скобкой обозначена целая часть числа.

В финансовых расчетах применяются также схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются годовая ставка  $r$  и количество начислений  $m$  за год. Фактически за базовый период принимается  $1/m$  часть года со ставкой сложных процентов  $r/m$ , так что

$$1 + r_T = (1 + r/m)^{Tm}. \quad (2.6)$$

*Пример 4.* Ссуда в 200 тыс. руб. дана на 1,5 года под ставку 120% годовых с ежеквартальным начислением. Сумма конечного платежа равна

$$200 (1 + 1 \cdot 1,2/4)^6 = 879,6 \text{ тыс. руб.}$$

### 2.3. Дисконтирование

Вычисление дисконта или дисконт-фактора за произвольный период времени  $T$  также производится по объявленной годичной ставке  $r$  или годичному дисконту  $d$  с использованием различных схем и с учетом либо простых, либо сложных ставок.

Укажем стандартные варианты. Банковский дисконт (bank rate)

$$V_T = 1 - Td, \quad (2.7)$$

где  $d$  — годичный дисконт, а  $T$  вычисляется как число дней до срока платежа, отнесенное к условной длительности года.

Данная схема применяется в банковских расчетах при покупке (учете) банковских краткосрочных обязательств (векселей).

*Пример 5.* Вексель выдан на сумму 2 млн руб. и содержит обязательство выплатить владельцу векселя эту сумму 15.03.93 г. Владелец предъявил банку вексель досрочно, 1.02.93 г., и банк согласился выплатить сумму (учесть вексель), но с дисконтом в 120% годовых. Полученная сумма равна

$$2 (1 - 42/360 \cdot 1,2) = 1,72.$$

Отметим, что схема банковского дисконта неприменима при  $Td > 1$ . В частности, лишена смысла операция учета за год с годовым дисконтом более 100%.

Более универсален другой вариант — математический дисконт-фактор

$$V_T = 1 / (1 + r_T) = 1 - d_T \quad (2.8)$$

где при простых процентах

$$r_T = Tr,$$

а при сложных

$$r_T = (1 + r)^T - 1.$$

Подчеркнем, что при расчете по сложным процентам математический дисконт-фактор за  $T$  лет легко выражается через годичный дисконт:

$$V_T = \frac{1}{(1 + r)^T} = (1 - d)^T = V^T, \quad (2.9)$$

где  $V$  — годичный дисконт-фактор.

Поскольку при  $Td < 0.1$

$$(1 - d)^T \approx 1 - Td$$

с точностью до 1%, то при малых  $Td$  банковский учет дает почти тот же результат, что и математически строгий.

Иногда применяют схему дисконтирования несколько раз в течение года. Оговариваются номинальный дисконт (годовая учетная ставка)  $d$  и число пересчетов в году  $m$ . Тогда

$$V_T = (1 - d / m)^{Tm}. \quad (2.10)$$

*Пример 6.* Вексель на 3 млн руб. с годовой учетной ставкой 10% с дисконтированием 2 раза в год выдан на 2 года. Исходная сумма, которая должна быть выдана в долг под этот вексель, равна

$$3 \cdot (1 - 0,1 / 2)^4 = 2.44 \text{ млн руб.}$$

В заключение необходимо подчеркнуть, что расчет платежей по заданным процентным или учетным ставкам должен производиться в точном соответствии с условиями контракта.

## 2.4. Эффективная ставка

Эффективной называется годовичная ставка сложных процентов, дающая то же соотношение между выданной суммой  $S(0)$  и суммой  $S(T)$ , которая получена при любой схеме выплат.

Общая формула эффективной ставки  $r_{ef}$  следует из определения

$$(1 + r_{ef})^T = \frac{S(T)}{S(0)}, \quad (2.11)$$

откуда

$$r_{ef} = \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right]^{\frac{1}{T}} - 1,$$

где  $T$  выражено в годах.

*Пример 7.* Пусть в долг на 1,5 года дана сумма 2 млн руб. с условием возврата 3 млн руб. Тогда эффективная ставка в этой сделке равна

$$r_{ef} = 1,5^{1/1,5} - 1 = 0,31 = 31\%.$$

*Пример 8.* Выдан кредит в 2 млн руб. на 3 месяца под 100% годовых.

С учетом того, что такой краткосрочный кредит подразумевает начисления под простые проценты,

$$S(T) = S(0) (1 + 3 / 12) = 2,5 \text{ млн руб.}$$

и эффективная ставка равна

$$r_{ef} = (2,5 / 2,0)^4 - 1 = 1,443 = 144,3\%.$$

*Пример 9.* Выдан вексель на условиях примера 6. В данном случае



$$S(T) = 3, S(0) = S(T) \cdot 0,95^4, T = 2,$$

так, что

$$r_{ef} = \left[ \frac{S(T)}{S(0)} \right]^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{0,95^2} - 1 = 0,108 = 10,8\%$$

Из приведенных примеров можно сделать следующий вывод: при оценке эффективности сделок, определенных с помощью процентных или учетных ставок, значение суммы начального или конечного платежа несущественно. Эффективная ставка непосредственно определяется заданием интереса или дисконта и схемой начислений. Приведем общие формулы для базовых схем.

1. При начислении под простой процент:

$$r_{ef} = (1 + Tr)^{1/T} - 1. \quad (2.12)$$

2. При начислении под сложный процент  $r$  с количеством начислений в год  $m$ :

$$r_{ef} = (1 + r/m)^m - 1. \quad (2.13)$$

3. При учете по банковскому дисконту:

$$r_{ef} = (1 + Td)^{-1/T} - 1 = 1 / (1 - Td)^{1/T} - 1. \quad (2.14)$$

4. При учете по математическому дисконту  $d$  с дисконтированием  $m$  раз в году:

$$r_{ef} = (1 + d/m)^m - 1 = 1 / (1 - d/m)^m - 1. \quad (2.15)$$

Расчет эффективной ставки  $r_{ef}$  — один из основных инструментов финансового анализа. Знание его позволяет сравнивать между собой сделки, построенные по различным схемам: чем выше эффективная ставка, тем (при прочих равных условиях) выгоднее сделка для кредитора.

Сравним, в частности, эффективные ставки при начислении под простой и сложный проценты и одинаковых

номинальных ставках  $r$ . Для сложного процента при  $m = 1$  имеем  $r_{\text{ef}} = r$ , а эффективность начислений под простой процент зависит от времени  $T$ . При  $T = 1$  год они совпадают, а при  $T \neq 1$  эффективности различны.

*Пример 10.* Вклад в сумме 1000 руб. внесен в сберегательный банк под 40% годовых. Сколько должны выплатить клиенту через 6 месяцев при использовании схемы сложных процентов?

Очевидно, что

$$S(T) = 1000 (1 + 0,4)^{1/2} = 1183 \text{ руб.}$$

Фактически же при принятой практике клиент-кредитор получит несколько больше:

$$S(T) = 1000 (1 + 1/2 * 0,4) = 1200 \text{ руб.}$$

Если вклад будет изъят через 1.5 года, то принятая методика комбинирования сложных и простых процентов даст

$$S(T) = 1000 (1 + 0,4)(1 + 1/2 * 0,4) = 1680 \text{ руб.},$$

в то время как при расчете только по сложным процентам сумма была бы меньше:

$$S(T) = 1000 (1 + 0,4)^{1,5} = 1656 \text{ руб.},$$

а при расчете только по простым процентам — еще меньше:

$$S(T) = 1000 (1 + 3/2 * 0,4) = 1600 \text{ руб.}$$

Нетрудно убедиться в справедливости общего положения: при одинаковой номинальной ставке процента эффективная ставка при начислениях под простые проценты выше, чем при начислениях под сложные, если период начисления меньше года, и ниже, если период больше года. Эффективная ставка при комбинированной схеме начисления всегда превосходит номинальную, если число лет не является целым.

## 2.5. Оценка потоков платежей

Многие финансовые контракты, в том числе контракты, оформленные в виде рыночных ценных бумаг, предусматривают не однократную выплату в конечный момент, а многократные выплаты в различные промежутки времени. Более того, и получение кредита может быть распределено во времени. Взаимоотношения между кредитором и дебитором в общем случае определяются потоком платежей. Приведем самый простой пример.

*Пример 11.* На счет в банке вносится сумма 10 тыс. долл., однако не сразу, а в течение 10 лет равными долями в конце каждого года. Какой будет сумма на счете после 10 лет?

Конечно, эта сумма окажется больше 10 тыс. долл., поскольку на счет зачисляются и проценты, которые все время присоединяются к имеющейся сумме.

В конце 1-го года окажется 1 тыс. долл. В конце 2-го года на нее будут начислены проценты и добавится еще 1 тыс. долл.

$$1 + 1 + r.$$

В конце 3-го года

$$1 + (1 + r) [(1 + (1 + r))] \text{ и т.д.}$$

Конечный результат можно представить в виде:

$$1 + (1 + r)[1 + (1 + r)[1 + \dots + 1 + r] \dots].$$

Если раскрыть скобки, то получим

$$S(10) = 1 + (1 + r) + (1 + r)^2 + \dots + (1 + r)^9.$$

Но тот же результат можно получить, рассуждая иначе: 1-й взнос пролежит 9 лет и возрастет до  $(1 + r)^9$ , 2-й — 8 лет и возрастет до  $(1 + r)^8$  и т.д., вплоть до последнего взноса, который поступил в конце 10-го года.

Замечая, что наращенная сумма (в тыс. долл.) выражается в виде суммы геометрической прогрессии с показателем  $1 + r$ , запишем окончательно

$$S(10) = ((1 + r)^{10} - 1) / r.$$

При  $r = 0.04$  (4% — я ставка) имеем  $S(10) = 12$  тыс. долл.

Рассуждения при решении этого примера применимы и в общем случае: наращенная сумма (future value) от ежегодных платежей  $n$  одинаковой величины  $C$  (такая система называется постоянной финансовой рентой, или аннуитетом (annuity)) при сложной процентной ставке  $r$  равна

$$S(n) = CS_{n,r}, \quad (2.16)$$

где использовано стандартное обозначение для коэффициента наращивания

$$S_{n,r} = \sum_{t=0}^{n-1} (1+r)^t = \frac{(1+r)^n - 1}{r}. \quad (2.17)$$

Рассмотрим произвольный поток платежей, задаваемый последовательностью выплат величиной  $C$  в моменты времени  $t = t_0, t_1, \dots, t_N$ .

Тогда сумма, наращенная к моменту  $T \geq t_N$ , равна

$$S(T) = \sum_{k=1}^N C_{t_k} [1 + r_{T-t_k}], \quad (2.18)$$

где  $r$  — относительный рост за любой период длительностью  $t$ .

Это общее выражение может быть упрощено для любой конкретной схемы платежей и процентных начислений.

Наращенная сумма (future value) определяется путем приведения всех платежей с учетом роста к конечному моменту действия контракта (или к моменту последнего платежа).

Во многих ситуациях представляет интерес приведение всех платежей к исходному данному моменту с учетом дисконтирования платежей, приходящих в будущем. Результат при-

ведения называется современной или приведенной величиной (present value,  $PV$ ).

Если обозначить дисконт-фактор  $V_t$  за любой период от исходного момента до произвольного момента  $t$  прихода платежа суммой  $C_k$ , то для современной величины платежей  $C_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , которые придут в моменты  $t_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , получаем выражение

$$S(0) = \sum_{k=1}^N C_k V_{t_k} \quad (2.19)$$

В частности, для постоянной ренты с поступлением в конце каждого года и ежегодным начислением по ставке  $r$  имеем за  $n$  лет

$$N = n, C_k = C, V_{t_k} = V^k = \left( \frac{1}{1+r} \right)^k,$$

так что

$$\frac{S(0)}{C} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{1+r} \right)^k = \frac{1 - (1+r)^{-n}}{r} = \frac{1 - V^n}{r} \quad (2.20)$$

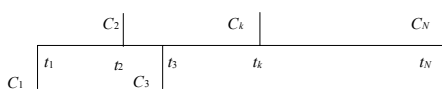
Смысл  $PV$  очень прост: это начальная сумма, вложив которую под те же проценты, можно обеспечить возможность выплаты из нее всех рентных платежей.

## 2.6. Двусторонний поток платежей. Чистая приведенная величина

Финансовая операция может предусматривать неоднократные и разновременные переходы денежных сумм от одного владельца к другому.

Рассматривая поток платежей с позиций одного из них, можно считать все поступления к нему положительными величинами, а все его выплаты — отрицательными. Для оценки финансовой операции в целом используется чистая приведенная величина (net present value,  $NPV$ ), вычисляемая по формуле (2.20), но с учетом знака величины  $C_k$ .

Удобно представить поток платежей в виде графической схемы:



*Пример 12.* Контракт между фирмой А и банком В предусматривает, что банк предоставляет в течение 3 лет кредит фирме ежегодными платежами в размере 1 млн долл. в начале каждого года под ставку 10% годовых. Фирма возвращает долг, выплачивая 1, 2 и 1 млн долл. последовательно в конце 3, 4-го и 5-го годов.

Какова  $NPV$  этой операции для банка? Согласно формуле (2.20) имеем

$$NPV = -1 - 1 \cdot 1 / (1 + 0,1) - 1 \cdot 1 / (1 + 0,1)^2 + 1 \cdot 1 / (1 + 0,1)^3 + 2 \cdot 1 / (1 + 0,1)^4 + 1 \cdot 1 / (1 + 0,1)^5 = 0,003 \text{ млн долл.}$$

Поскольку результат положителен, то эта операция является для банка приемлемой.

Требование положительности  $NPV$  является обязательным при принятии решения о реализации финансовой операции кредитором. Вместе с тем вычисление  $NPV$  не может определить степень рациональности такой операции, что следует учитывать при наличии альтернативной возможности вложения капитала. С этой целью вводится понятие эффективной ставки операции (внутренней эффективности) как значения ставки процента, при которой  $NPV$  окажется равной нулю.

Таким образом, если операция предусматривает выплаты  $C_k$  (учетом знака!) в моменты  $t_k$ , то эффективная ставка  $r_{ef}$  вычисляется как корень уравнения

$$\sum_{k=1}^N C_k \frac{1}{(1+r)^{t_k}} = 0. \quad (2.21)$$

При этом начало операции (первая выплата) принимается за начало отсчета времени.

Приведенное определение эффективной ставки любой финансовой операции обобщает данное ранее определение эффективной ставки простейшей операции (2.11), связанной с предоставлением кредита на сумму  $S(0)$  и возвратом долга в сумме  $S(T)$ , и не противоречит ему. Действительно, в простейшей операции

$$C_1 = -S(0); C_2 = S(T); t_1 = 0, t_2 = T,$$

так что уравнение эффективной ставки имеет вид

$$-S(0) + S(T) \cdot \frac{1}{(1+r)^T} = 0,$$

или

$$(1+r)^T = S(T) / S(0),$$

что совпадает с (2.11).

Приведем практически важный пример оценки эффективной ставки широко распространенной на Западе операции выдачи ссуд под обеспечение собственности на дом или земельный участок (real estate mortgage). Арендная плата за съем дома или квартиры очень высока, поэтому для каждого американца и прежде всего для «нового» американца (иммигранта), важной является дилемма: тратить деньги на аренду или на покупку собственного дома. При этом наличных денег, необходимых для покупки дома, естественно, нет, и речь может идти только об оплате с помощью ссуды, взятой в банке, выдаваемой под заклад приобретаемой собственности. В случае неплаты долга эта собственность может быть продана кредиторами, изымающими из вырученной суммы неуплаченный долг.

Как правило, при выдаче ссуды применяется схема полностью амортизированного платежа, при которой долг вместе с процентами полностью выплачивается к концу срока путем периодических платежей.

*Пример 13.* Выдана ссуда в 120 тыс. долл. на 30 лет под 9% годовых. Должник обязан ежемесячно выплачивать равными долями долг вместе с процентами (фактически имеются в виду месячные проценты в 1/12 от годовых, т.е. 0,75%). Какова сумма месячного платежа?

Она рассчитывается из условия, что  $NPV$  потока платежей должна быть равна нулю, иначе говоря, указанная в договоре ставка должна совпадать с месячной эффективной ставкой потока платежей. Если  $C$  — сумма платежа в тыс. долл, то должно быть

$$-120 + C \text{ или } C(1 - 1,0075^{-360}) / 0,0075 = 120,$$

так что

$$C = 120 / 124,28 = 0,96555.$$

Общая сумма всех платежей составит 347598 долл.

Иногда применяется схема частичной амортизации.

*Пример 14.* Ссуда в 10 тыс. долл. выдана под 12% годовых (т.е. под 1 % месячных) и требует ежемесячной оплаты по 130 долл. и выплаты остатка долга к концу срока в 10 лет. Каков остаток долга  $D$ ?

Поскольку ставка понимается как месячная эффективная, то должно быть выполнено условие

$$-10000 + 130(1 - 1,01^{-120})/0,01 + D1,01^{-120} = 0,$$

откуда  $D = 3098,83$  долл.

Заключение. Мы установили, что для любой финансовой операции с четко оговоренными сроками и суммами взаимных платежей может быть установлена мера ее эффективности как процент, обеспечивающий равенство нулю чистой приведенной величины потока платежей. Выбирая между различными вариантами возможных финансовых операций, инвестор всегда ориентируется на операцию с высшей эффективной ставкой.

### ЛЕКЦИЯ 3. ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА В ИНВЕСТИЦИОННОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

#### 3.1. Понятие об инвестициях в реальные активы.

##### **Классификация инвестиций. Роль инвестиций в увеличении ценности фирмы**

Одной и важнейших сфер деятельности любой фирмы являются инвестиционные операции, т.е. операции, связанные с вложением денежных средств в реализацию проектов, которые будут обеспечивать получение фирмой выгод в течение периода, превышающего один год.

В коммерческой практике принято разделять следующие типы таких инвестиций:

- инвестиции в физические активы;
- инвестиции в денежные активы;
- инвестиции в нематериальные (незримые) активы.



Под физическими активами подразумеваются производственные здания и сооружения, а также любые виды машин и оборудования со сроком службы более одного года.

Под денежными активами — права на получение денежных сумм от других физических и юридических лиц, например, депозиты в банке, акции, облигации и т.д.

Под нематериальными активами понимаются ценности, приобретаемые фирмой в результате проведения программ переобучения или повышения квалификации персонала, разработки торговых знаков, приобретения лицензий и т.п.

Инвестиции в ценные бумаги принято называть портфельными инвестициями, а инвестиции в физические активы — инвестиции в реальные активы.

**Классификация инвестиций в реальные активы.** Подготовка и анализ инвестиций в реальные активы существенно зависят от того, какого рода это инвестиции, т.е. какую из стоящих перед фирмой задач необходимо решать с их помощью. С этих позиций все возможные разновидности инвестиций можно свести в следующие основные группы:

1) инвестиции в повышение эффективности. Их целью является прежде всего создание условий для снижения затрат фирмы за счет замены оборудования, обучения персонала или перемещения производственных мощностей в регионы с более выгодными условиями производства;

2) инвестиции в расширение производства. Задачей такого инвестирования является расширение возможностей выпуска товаров для ранее сформировавшихся рынков в рамках уже существующих производств;

3) инвестиции в создание новых производств. Такие инвестиции обеспечат создание совершенно новых предприятий, которые будут выпускать ранее не изготавливавшиеся фирмой товары (или оказывать новый тип услуг) либо позволят фирме предпринять попытку выхода с ранее уже выпускавшимися товарами на новые для нее рынки;

4) инвестиции ради удовлетворения требований государственных органов управления. Эта разновидность инвестиций становится необходимой в случае, когда фирма должна удовлетворить требования властей в части либо экологичес-

ких стандартов, либо безопасности продукции, либо иных условий деятельности, которые не могут быть обеспечены за счет только совершенствования менеджмента.

Причиной, заставляющей вводить эту классификацию инвестиций, является различный уровень риска, с которым они сопряжены. Зависимость между типом инвестиций можно представить в виде такой схемы:



Логика такой зависимости очевидна: она определяется степенью опасности не угадать возможную реакцию рынка на изменение результатов работы фирмы после завершения инвестиций. С этих позиций, например, организация нового производства для выпуска незнакомого рынку продукта сопряжена с наибольшей степенью неопределенности, тогда как повышение эффективности в производстве уже принятого рынка товара несет минимальную опасность.

**Роль инвестиций в увеличении ценности фирмы.** Ценность фирмы и ее увеличение — естественная и логичная цель любого разумного менеджера, и цель эта куда более универсальна, чем увеличение прибыли, которое нередко рассматривается как главная задача частной фирмы. При таком упрощенном подходе трудно понять логику некоторых типов коммерческих стратегий, нацеленных не на максимизацию массы прибыли или уровня рентабельности, а на расширение своего сектора рынка или увеличение нематериальных активов.

Ценность фирмы складывается из двух частей: рыночной стоимости собственного капитала фирмы и рыночной стоимости обязательств фирмы. Экономический смысл термина таков: ценность фирмы — реальное богатство, которым обладают владельцы фирмы.

Две основные группы факторов, влияющих на ценность фирмы, таковы:

- инвестиции всех типов;
- прочие факторы, в т.ч. финансовый и производственный менеджмент.

Очевидно, что ценность фирмы реально определяется не величиной ее капитала (за исключением капитала, находящегося в форме наиболее ликвидных активов), а тем, какое положение этот капитал обеспечивает фирме на рынке ее товаров и услуг. Это положение и определяется направлениями инвестиций: если они повышают конкурентоспособность и обеспечивают прирост доходности ее капитала, то ценность фирмы растет.

Вывод: любые инвестиции следует рассматривать прежде всего с точки зрения того, как они влияют на эффективность фирмы. Этот критерий наиболее общий и основополагающий, хотя его практически невозможно строго формализовать.

### **3.2. Понятие о денежных потоках (cash flow). Подход бухгалтера и финансиста к оценке денежных потоков. Роль амортизации в инвестиционном проектировании**

Одно из новых понятий современного финансового менеджмента — это понятие о денежных поступлениях, или денежных потоках — cash flow. Несмотря на распространенную ошибку переводчиков, термин cash flow никак не связан с движением наличных денежных сумм в кассе предприятия и обозначает чистый денежный результат коммерческой деятельности фирмы.

Современный финансовый менеджмент широко использует также термины «денежный приток» и «денежный отток», которые дают представление о направленности денежного потока.

Денежные притоки фирмы связаны с тем, что она:

- 1) продает свои товары за наличные, а также получает от дебиторов платежи по товарам, проданным в кредит;
- 2) получает доходы от инвестирования в ценные бумаги или операции своих филиалов в стране или за рубежом;
- 3) продает свои вновь эмитированные ценные бумаги разных типов;
- 4) избавляется от ненужных или лишних активов;
- 5) привлекает кредиты.

Денежные оттоки фирмы связаны с тем, что она:

- 1) приобретает сырье и материалы для осуществления своей деятельности;

2) выплачивает заработную плату и жалование своим работникам (в мировой практике термином жалование обычно обозначают оплату труда служащих, а термином заработная плата — оплату труда рабочих);

3) поддерживает в работоспособном состоянии свой основной капитал и осуществляет новые инвестиции;

4) выплачивает дивиденды и проценты по взятым кредитам;

5) погашает основные суммы задолженностей по облигациям и кредитам.

Анализ денежных притоков и оттоков чрезвычайно важен для оценки деятельности фирмы. Однако при рассмотрении проблемы оценки приемлемости инвестиций более важными являются денежные поступления, т.е. тот «сухой денежный остаток», который образует приращение богатства фирмы. При этом далее речь будет идти о результате, который остается у фирмы после уплаты налогов, т.е. свободном от обязательств перед государством.

Однако этот результат не тождественен чистому доходу фирмы. Здесь необходимо четко разграничить подход бухгалтера и подход финансиста или экономиста.

Подход бухгалтера предполагает рассмотрение в качестве конечного результата деятельности фирмы ту сумму денежных средств, которой фирма может свободно распоряжаться по своему усмотрению. Такой точке зрения в наибольшей степени отвечает чистый доход после уплаты налогов.

Подход финансиста и экономиста предполагает рассмотрение в качестве конечного результата, во-первых, сумму средств, которой фирма может свободно распоряжаться по своему усмотрению, во-вторых, денежные средства, использование которых жестко лимитировано действующими нормативными документами, но которые в конечном счете вливаются в общую ценность фирмы, повышая ее. Реально речь может идти о двух видах таких средств:

— амортизации;

— начисленных, но еще не внесенных налоговых платежах.

Амортизация по своей экономической природе является целевым отчислением, призванным обеспечить накопление средств

для компенсации физического и морального износа основного капитала, используемого фирмой для всех типов ее операций. Масштабы такого начисления зависят от трех факторов:

- балансовой стоимости оборудования, входящего в состав основного капитала;
- предполагаемого срока службы оборудования до момента его списания;
- избранного фирмой метода начисления амортизации.

Однако амортизация, являясь источником формирования денежного фонда специального (целевого) назначения, при этом не перестает быть собственностью фирмы, хотя и вычитается из прибыли подобно издержкам производства или налоговым платежам. Здесь присутствует лишь ограничение свободы собственников средств в их расходовании, хотя сами эти целевые средства продолжают работать на благо фирмы. Ведь в итоге, когда фирме потребуется осуществить вложение средств капитала для замены изношенного основного капитала, амортизационный фонд станет для нее эквивалентен чистой прибыли после налогообложения. С этой точки зрения формирование амортизационного фонда выступает как накопление инвестиционного резерва фирмы.

Поэтому вполне логично включать начисленную амортизацию в денежный поток.

Если воспользоваться терминологией американского стандарта бухгалтерского учета GAAP (Generally Accepted Accounting Principles — Общепринятые принципы бухгалтерского учета), к которому постепенно приближается схема бухучета в России, то уравнение для определения величины денежных поступлений можно записать следующим образом:

$$ДП = P - (З - А) - Пр - Нулл,$$

где  $ДП$  — денежные поступления;  $P$  — выручка от реализации;  $З$  — совокупные затраты;  $А$  — амортизация;  $Пр$  — выплаты процентов;  $Нулл$  — уплаченные налоги.

Обратите внимание, что речь идет именно об уплаченных налогах. Эта оговорка связана с существованием такой

финансово-бухгалтерской категории, как начисленные, но еще не уплаченные налоги. В отечественной практике к этому наиболее близко подходит инвестиционный налоговый кредит. Он представляет собой сумму налогов, подлежащих уплате только после окончания льготного периода завершения инвестиционной деятельности, под которую он предоставлен. Т.е. такие отсроченные налоговые платежи выступают как дополнительный источник инвестиционных ресурсов фирмы.

Категория «денежные поступления» является основной в теории инвестиционного анализа. С позиций экономической теории доказуемо, что ценность фирмы в любой момент времени равна совместной стоимости всех ее будущих денежных поступлений.

Отсюда, например, следует, что стоимость акции для акционера равна дисконтированной современной стоимости всех будущих денежных дивидендов плюс возможная курсовая стоимость акции в момент продажи. А следовательно, инвесторы и владельцы фирмы получают адекватное представление о том, приведет ли реализация проекта к увеличению ценности фирмы, только в том случае, если все расчеты приемлемости инвестиций проводятся на основе информации о денежных поступлениях.

### **3.3. Основные составляющие бизнес-плана. Особенности бизнес-планирования в условиях инфляции. Особенности бизнес-планирования в условиях Республики Беларусь**

Бизнес-план представляет собой специальный инструмент управления, широко используемый практически во всех областях современной рыночной экономики независимо от масштабов и сферы деятельности предприятия, формы собственности.

Задача бизнес-плана – дать целостную, системную оценку перспектив инвестиционного проекта. С этой точки зрения он выступает как форма представления результатов предварительного технико-экономического обоснования средних и крупных проектов. Применительно к мелким промышлен-

ным или иным проектам он может являться документом, представляющим результаты полного исследования инвестиционного проекта.

**Персоналом управления предприятием бизнес — план используется для:**

- определения круга проблем, с которыми столкнется предприятие при достижении намеченных целей;
- оценки финансового положения и конкурентоспособности предприятия на действующем и новом рынке товаров и услуг;
- выработки стратегии деятельности предприятия в условиях конкурентной борьбы с другими предприятиями, выпускающими такие же товары и предоставляющими сходные услуги;
- формулировки и обеспечения путей решения этих проблем.

**Потенциальным инвестором и партнером** используется для оценки финансовой и экономической эффективности намечаемых предприятием мероприятий, реальности получения желаемой прибыли и возврата кредиторам вложенных в этот проект средств. Бизнес-план должен быть достаточно полным, чтобы, ознакомившись с ним потенциальный инвестор мог получить полное представление о предлагаемом проекте.

### **Цели бизнес-плана**

Определение целей является достаточно сложной задачей, которую необходимо решить перед составлением бизнес-плана. Цели можно рассматривать как желаемые состояния, которые хотелось бы достичь персоналу управления предприятия. В действующей практике около 95% руководителей не могут правильно сформулировать цели предприятия в рыночных условиях.

Процедура установления целей включает в себя установление общих целей предприятия, указание его специфических конкретных целей, которые определяют промежуточные этапы в достижении общих целей, определение приоритетности целей и их распределение во времени.

Возможными целями разработки бизнес-плана предприятия могут быть:

- увеличение капитала предприятия;
- увеличение нормы прибыли;
- насыщение рынка услуг;

- освоение новых видов товаров и услуг;
- выход на новые товарные рынки и рынки услуг;
- освоение других видов деятельности (диверсификация производства);
- другие цели.

Для того, чтобы он мог служить инструментом для достижения этих целей, в бизнес-плане необходимо четко сформулировать ответы на следующие вопросы:

- Что представляет (или будет представлять) собой предприятие (фирма)?
  - Какие новые товары и услуги предлагаются потребителям и есть ли платежеспособный спрос на них?
  - Какие рынки (местные, межрегиональные, национальные зарубежные) планируется обслуживать?
  - Каким образом планируется превзойти конкурентов и расширить сферу деятельности предприятия?
  - Почему кредит или инвестиции сделают предприятие более доходным и конкурентоспособным?

### **Структура бизнес-плана**

Структура бизнес-плана органически вытекает из его назначения как документа, в котором по определенной схеме систематизированы результаты прединвестиционных исследований. В нем описывается организационная форма предприятия, продукция и услуги, которые планируется предоставить, и предполагаемое или фактическое местоположение предприятия, план управления и контроля, требуемое количество персонала и возможный риск.

Почти невозможно создать рынок для товаров и услуг без учета различных направлений маркетинга. Раздел маркетинга в бизнес-плане рассматривает целевые рынки, конкуренцию, вопросы сбыта, рекламы, ценообразования.

Бизнес-план включает в себя описание отрасли и тенденций ее развития, а также данные о потенциале предприятия.

Деньги являются одной из важнейших составных частей, условий реализуемости проекта. Бизнес-план должен включать оперативный прогноз, план приобретения необходимого капитала и описание того, как эти средства будут расходоваться. Он должен включать примерный балансовый отчет для обеспечения соответствующего денежного потока.



Бизнес-план также должен включать краткую характеристику руководителей предприятия. Некоторые планы содержат диаграммы, фотографии или видеозаписи для объяснения того, что трудно описать другим способом.

Схемы систематизации разделов, используемые в российской и зарубежной практике, по сути своей одинаковы и различаются только по форме представления и расположению частей.

Часто систематизация разделов проводится недостаточно тщательно, однако такой подход недопустим. Прежде всего — это прекрасный эскиз того, что будет включено в бизнес-план. И для читающего это очень важно, так как наиболее значительные части могут быть сразу же выделены. Поэтому сделайте его так, чтобы каждый легко нашел то, что ему нужно.

В бизнес-плане предусматриваются следующие разделы:

Резюме

Меморандум о конфиденциальности

Краткое содержание:

описание отрасли, предприятия, продукта.

Исследование и анализ рынка.

Российский рынок (наименование рынка).

Динамика цен.

Рыночная ниша.

Анализ конкуренции.

Рынки стран ближнего зарубежья.

Возможный выход на мировой рынок.

Освоение западноевропейского рынка.

Восточноевропейский рынок.

Анализ инвестиционного рынка в отрасли.

План маркетинга

Планирование производства.

Планирование сбыта.

Продукт А.

Внутренний рынок.

Рынки стран ближнего зарубежья.

Мировой рынок.

Продукт Б.

Внутренний рынок.

Рынки стран ближнего зарубежья.

Мировой рынок.  
Стратегия маркетинга.  
Стратегия сбыта.  
Ценовая стратегия.

Стратегия производства.

Этапы создания нового производства.

Вариант 1.

Вариант 2.

Предложения по стратегии развития производства.

Организационный план.

Организационно-правовая форма.

Философия управления.

Руководство предприятием.

Критические риски и проблемы.

Финансовый план.

### **Команда разработчиков**

Важнейшей подготовительной стадией при подготовке бизнес-плана является подбор специалистов для его разработки. При формировании коллектива разработчиков следует руководствоваться двумя правилами:

1. В разработке бизнес-плана необходимо личное участие руководителя и рабочей группы предприятия, реализующего проект, а также сторонних экспертов и консультантов для оценки проекта и выбора оптимальных путей его осуществления.

2. Для проведения маркетинговых исследований, финансового планирования, проработки организационно-правовых вопросов целесообразно приглашать сторонних экспертов и консультантов.

### **Информационное обеспечение**

Для разработки бизнес-плана необходимо собрать и проанализировать информацию об объеме производства, потенциального спроса, производственных и финансовых потребностях предприятия, позволяющую рассмотреть несколько альтернативных вариантов реализации инвестиционного проекта, что увеличивает надежность успешного достижения основной цели проекта и его привлекательность для возможных инвесторов. Эту информацию можно найти в изданиях Госкомстата, отраслевых изданиях или приобрести в конъюнктурных институтах и фирмах.

Для выполнения расчетов финансового плана в настоящее время разработаны стандартные программы решения этих задач на персональных компьютерах. Примерами таких программ могут служить: бухгалтерско-финансовый комплекс «ФОЛИО», который позволяет проводить такие расчеты без специальной подготовки; программы «СОМФАР», «Propspin», разработанные ЮНИДО; программа «Инвестпроект», разработанная Российской финансовой корпорацией; интегрированный пакет Project-Expert. Эти программы позволяют выполнить полный расчет экономической и финансовой эффективности реализации инвестиционного проекта.

С точки зрения приложений методов финансовой математики, наибольший интерес для нас представляет финансовый план. Поэтому рассмотрим более подробно вопросы планирования финансовых ресурсов в бизнес-плане.

### **Структура плана и общая схема планирования**

**Цель финансового плана** – представить систему прогнозных данных об ожидаемых потребностях в финансовых ресурсах и оценках финансовых результатов деятельности, которые являются одним из важнейших критериев оценки привлекательности проекта для инвесторов и кредиторов. Из этого раздела инвестор узнает, на какую прибыль он может рассчитывать, а кредитор – о способности потенциального заемщика к возврату долга.

Финансовый план является ключевым разделом бизнес-плана. Этот раздел содержит основные экономические показатели предприятия на перспективу и составляется по результатам всех предыдущих разделов бизнес-плана. Структура финансового плана показана на рис.3.1.

В финансовом плане представляются прогнозные проектные следующие документы: план прибылей и убытков, план движения денежной наличности, план — баланс, а также излагается стратегия финансирования, приводятся показатели эффективности проекта. Как правило, эта обязательная информация дополняется анализом безубыточности, а для действующих предприятий – финансовыми показателями за прошлые годы деятельности.

Информация, необходимая для составления финансовых прогнозов, в большей части на этой стадии уже получена в предыдущих разделах, когда составлялись планы-прогнозы продаж, текущей деятельности в сфере маркетинга, сбыта, производства, инвестиционных операций.

В данном разделе все прогнозы объединяются в финансовый. Схема информационных потоков при формировании финансового плана представлена на рис.3.2.

Поскольку многообразие информации может привести к ее недостоверности, разрабатываются, как правило, три варианта финансовых прогнозов: оптимистический, пессимистический и наиболее вероятный (различия между ними покажет степень риска для данного проекта).



Рис. 3.1. Структура финансового плана

Основным фактором неопределенности и, следовательно, вариантности является достоверность прогнозной оценки сбыта (если проект не имеет целевых заказчиков).

Разработка финансового плана отличается необходимостью проведения большого объема трудоемких стандартных расчетов, поэтому в первую очередь является привлекательным объектом для моделирования и использования вычислительной техники.

Применение компьютеров позволяет резко сократить трудоемкость этих расчетов, и в настоящее время известные программные пакеты «ФОЛИО», «COMFAR», «Propspin», «Инвестпроект», Project-Expert и др. ориентированы на автоматизацию именно финансовых расчетов на базе использования имитационных моделей.

Исходной информацией для формирования финансового плана являются текущие и инвестиционные издержки, экономические условия реализации проекта: дифференцированная инфляционная характеристика среды и инфляционных тенденций; описание налогового окружения (перечень видов налогов и их ставки, сроки выплаты, тенденции изменения); оценка условий платежей (сроки погашения кредиторской и дебиторской задолженностей).

### **Оценка и прогнозирование текущих издержек**

#### **Основные задачи:**

Оценка и прогнозирование издержек на единицу продукции (удельных издержек) – необходимы для обоснования цены на продукцию.

Оценка и прогнозирование общих издержек на весь объем производства по периодам планирования – необходимы для планирования денежных потоков и прибыли (убытка).

Неточность оценки издержек — один из существенных недостатков бизнес-планирования, поэтому при расчете важно предусмотреть всевозможные текущие издержки на производство и реализацию продукции. Понятия «оценка» и «прогнозирование» различаются временными параметрами расчетов.

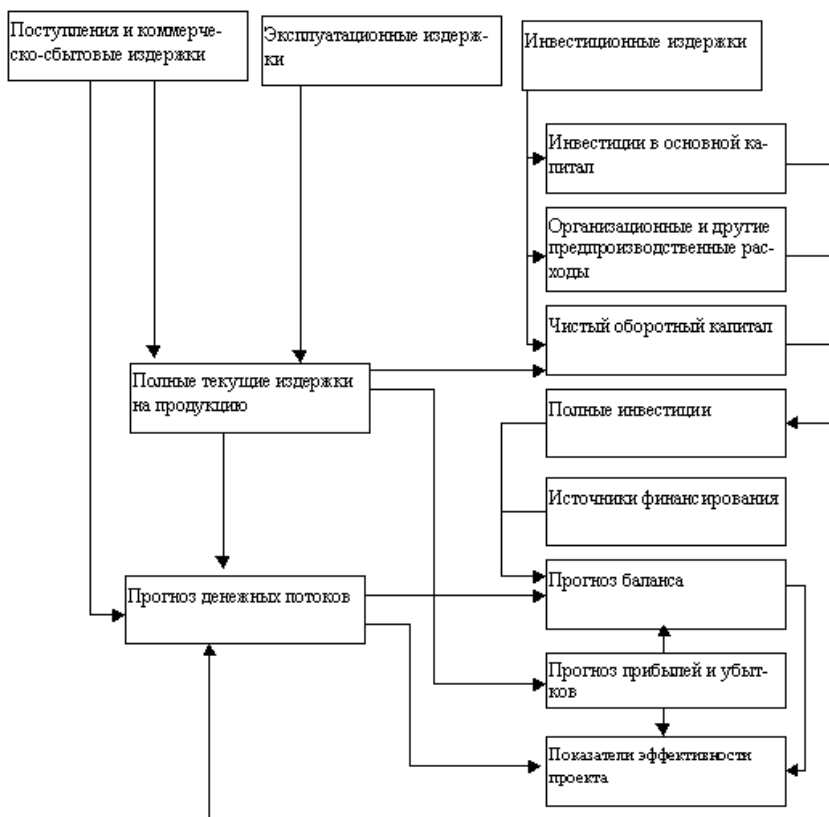


Рис. 3.2. Схема информационных потоков при формировании финансового плана.

Оценка текущих издержек предполагает их определение в статике (обычно в условиях уже освоенного производства), а прогнозирование связано с оценкой тенденций издержек во времени. Различия в понятиях «себестоимость» и «текущие издержки» заключаются в том, что понятие себестоимость – учетно-нормативное. Состав затрат, включаемых в себестоимость, регулируется законодательством. Себестоимость меньше или равна текущим издержкам и отличается от них тем,

что в себестоимость приобретаемых материалов (услуг) со стороны не включаются НДС, уплачиваемый при покупке. В себестоимость не включаются выплаты по займам за рублевые кредиты в размерах, превышающих ставку рефинансирования Центробанка плюс три пункта маржи коммерческим банкам, а также другие расходы в соответствии с законодательными. Оценка текущих издержек на единицу продукции осуществляется путем составления калькуляций. При формировании бизнес-плана используют, как правило, сокращенную номенклатуру калькуляционных статей текущих затрат, выделяя наиболее важные для данного проекта затраты. Состав статей зависит от специфики бизнеса (отрасли), а также от решения вопроса организации бухгалтерского учета на предприятии, в частности, от особенностей ведения учета затрат, и может быть структурно представлен как на рис. 3.3.

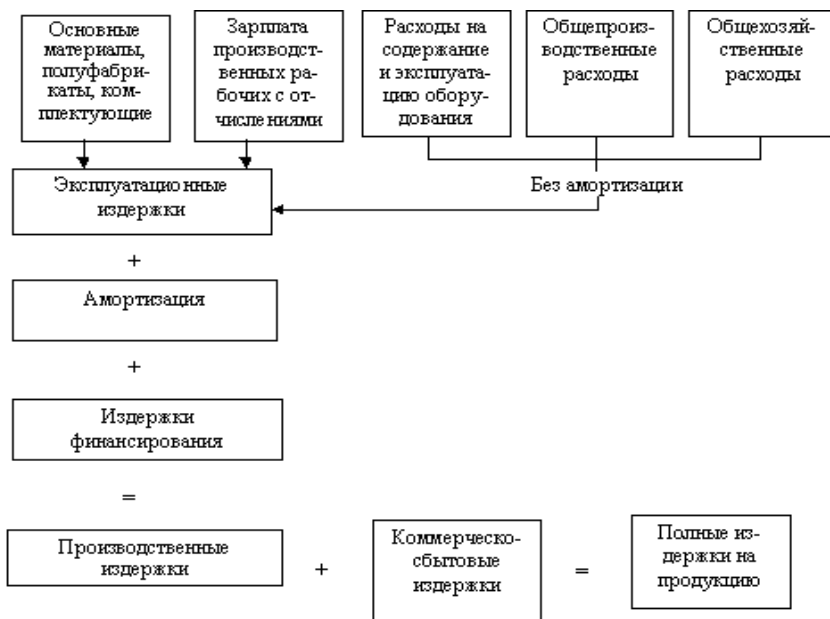


Рис. 3.3. Структура текущих издержек

Необходимым условием калькулирования является разделение текущих издержек на переменные, величина которых пропорционально связана с количеством произведенной продукции, и постоянные, которые причисляются не к продукту или услуге, а учитываются по месту возникновения (цех, завод, производство, сбыт, управление) и не связаны напрямую с объемом производства продукта. Необходимо также выделение так называемых калькуляционных статей, т.е. тех позиций, которые нужно при калькулировании определять отдельно.

К таким статьям относятся амортизационные отчисления и издержки финансирования. Амортизационные отчисления выделяются в отдельную статью и рассматриваются как калькуляционные, поскольку, являясь внутренним источником финансирования, никому не выплачиваются, остаются в распоряжении предприятия, увеличивая сумму денежных средств на его счете, т.е. рассматриваются как притоки денежных средств. Амортизации (износу) подвергаются материальные и нематериальные объекты инвестирования, приобретение (создание) и использование которых предусмотрено в соответствующих разделах бизнес-плана (производственном, инвестиционном). Износ начисляется по единым нормам амортизации, установленным в процентах к первоначальной стоимости основных средств. В отношении активной части основных производственных фондов предприятие может принять решение о применении механизма ускоренной амортизации в пределах установленного правительством перечня высокотехнологических отраслей и эффективных видов машин и оборудования, а также для предприятий малого бизнеса и оформленное как элемент учетной политики. Сумма амортизационных отчислений по этим основным средствам начисляется с применением коэффициента ускорения (обычно не превышающего 2).

Издержки финансирования – проценты за кредит — как правило, рассматривают как часть общехозяйственных накладных расходов, особенно если они связаны с существующим предприятием и для которого уже известна схема финансирования, однако для целей бизнес-планирования издержки финансирования выделяют для проведения финансового анализа и оценки инвестиций.



В соответствии с международными стандартами в случае амортизируемых инвестиций, необходимых для маркетинговой деятельности и сбыта (например, грузовиков при поставке), амортизационные расходы должны включаться в расчет издержек маркетинга и сбыта.

Ориентировочная дифференциация статей текущих затрат представлена в таблице 3.1.

Таблица 3.1

*Дифференциация текущих издержек*

Направление затрат	Дифференциация затрат	Источник информации
Производство	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Основные материалы, полуфабрикаты и комплектующие изделия (КИ)</li> <li>2. Зарплата производственных рабочих с обязательными отчислениями</li> <li>3. Расходы по содержанию и эксплуатации оборудования: <ul style="list-style-type: none"> <li>• вспомогательные материалы на технологические цели;</li> <li>• амортизация и эксплуатация оборудования и транспортных средств;</li> <li>• текущий ремонт оборудования и транспортных средств;</li> <li>• внутризаводское перемещение грузов, др.</li> </ul> </li> <li>4. Общепроизводственные расходы: <ul style="list-style-type: none"> <li>• содержание аппарата управления цеха;</li> <li>• амортизация зданий;</li> <li>• текущий ремонт зданий, др.</li> </ul> </li> </ol>	Производственный план
Управление	<ol style="list-style-type: none"> <li>5. Общехозяйственные расходы: <ul style="list-style-type: none"> <li>• зарплата аппарата управления предприятия;</li> <li>• командировки, консультации;</li> <li>• представительские расходы;</li> <li>• амортизация и содержание офиса;</li> <li>• налоги, сборы и др. обязательные отчисления в составе себестоимости.</li> </ul> </li> </ol>	Производственный и организационный планы
Маркетинг	<ol style="list-style-type: none"> <li>6. Коммерческо-сбытовые расходы: <ul style="list-style-type: none"> <li>• расходы на тару и упаковку;</li> <li>• расходы на транспортировку;</li> <li>• зарплата работников сбыта;</li> <li>• комиссионные сборы и отчисления сбытовым организациям;</li> <li>• гарантийный ремонт и обслуживание;</li> <li>• расходы на рекламу, подготовка продавцов.</li> </ul> </li> </ol>	План маркетинга
Финансы	<ol style="list-style-type: none"> <li>7. Проценты за кредит.</li> </ol>	Финансовый план

**Методы оценки текущих издержек** можно разделить на укрупненные и детализированные.

Укрупненные методы оценки применяются при отсутствии информации о затратах на изделия-аналоги и на предварительных этапах разработки бизнес-плана, когда важна первая прикидка финансовых результатов проекта. Одни методы дополняют другие, поэтому на практике они обычно используются совместно.

*Метод прямого поэлементного (постатейного) счета* — инженерный, детальный метод расчета себестоимости единицы изделия. Он основан на детальном расчете потребности в ресурсах для производства и реализации продукции: технологическом нормировании трудозатрат, материальных затрат на единицу изделия в соответствии со спецификацией и расчете потребности в каждом из физических факторов производства (материалы, труд, оборудование) и стоимостной оценке этих факторов. Здесь материальные, трудовые и другие потребности факторов производства на единицу изделия, потребляемые в одном хозяйственном цикле, переводятся в стоимостную форму.

Метод прямого счета отличается дороговизной. Он (его упрощенные варианты) применяется лишь тогда, когда известно, что понесенные затраты, связанные с его использованием, будут меньше чистой прибыли от реализации проекта и если нет информации об издержках на изделия-аналоги, а также на окончательных этапах разработки бизнес-плана.

На предварительной стадии разработки бизнес-плана часто рассматривают лишь суммарные издержки на весь объем производства, которые затем могут быть разбиты на основные статьи в соответствии со структурой затрат на аналогичных производствах. Суммарные затраты могут быть получены методом планирования затрат от оборота.

*Метод планирования затрат от оборота* — укрупненный. Этот метод используется, когда составлен прогноз объема продаж. Оценка затрат осуществляется, исходя из достижимого процента прибыли от продаж, который должен быть реальным, оцененным заранее. В этом случае полученные общие издержки на весь объем реализованной продукции делят на количество единиц продукции (для однономенклатурного производства) и таким образом определяют удельные издержки.

Если проектом предусмотрено производство нескольких изделий с очень сходной технологией (сортовое производство), то издержки на отдельные изделия можно определить с помощью коэффициентов эквивалентности.

*Пример.*

Объем производства за месяц составляет:	Коэффициенты эквивалентности
Повидло (изделие А)	20000 кг Изделие А-1,0
Сливовый мусс (изделие Б)	10000 кг Б-1,4
Сироп (изделие В)	15000 кг В-0,8
Общие издержки	92000 у.е.

Коэффициент эквивалентности 1,4 означает, что одна количественная единица изделия Б требует на 40% больше затрат, чем одна количественная единица изделия А.

Калькуляция себестоимости:

$$\text{Себестоимость изделия А: } C_A = C_A = \frac{92000}{(20000 \cdot 1 + 10000 \cdot 1,4 + 15000 \cdot 0,8)} = 2 \text{ у.е. за 1 кг}$$

$$\text{Себестоимость изделия Б: } C_B = 2,8 \text{ у.е. за 1 кг}$$

$$\text{Себестоимость изделия В: } C_B = 1,6 \text{ у.е. за 1 кг}$$

Оценка и прогнозирование текущих издержек обычно осуществляются при условии выхода предприятия на проектную мощность, т.е. после окончания периода освоения.

*При прогнозировании* текущих издержек основываются на следующих допущениях:

- во-первых, линейный характер изменения затрат;
- во-вторых, колебания в общем уровне затрат вызваны изменением прямых затрат.

Переменные издержки определяются при выходе на проектный уровень производства при нормальных условиях функционирования предприятия (нормальные перерывы в работе, простои, целесообразный режим работы) и рассчитываются на единицу изделия и по периодам планирования в зависимости от изменения уровня производства продукции по отношению к выпуску при 100% освоении проектной мощности. Постоянные издержки рассчитываются для базового (как правило, первого) планового периода либо по отдельным периодам планирования, если предусмотрено их изменение.

Принятые для упрощения прогнозирования допущения о линейном характере изменения текущих издержек (бухгалтерская модель) не всегда соответствуют действительности (экономическая модель), рис. 3.4.

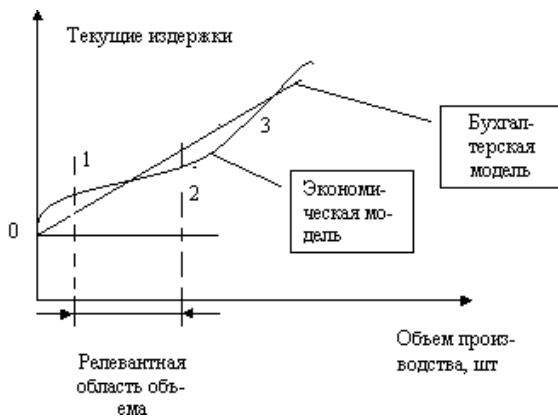


Рис. 3.4. Динамика текущих издержек

Как показывает рисунок, релевантная область позволяет использовать линейную функцию в пределах ограниченного объема производства (отрезок 1-2), вне этой области затраты увеличиваются быстрее (отрезок 0-1) или медленнее (отрезок 2-3) линейного коэффициента.

Нелинейность поведения текущих издержек обусловлена различными обстоятельствами:

Отрезок 0-1 – период освоения, издержки растут более быстрыми темпами, чем увеличение выпуска. Технология, организация производства еще недостаточно отлажены, низка производительность труда, высок уровень брака. Устранение этих факторов завышения себестоимости требует некоторого времени и для этого нужны финансовые резервы для компенсации низкой прибыли или убытков.

Отрезок 1-2 – линеаризация кривой издержек и некоторое ее снижение, связанное с завершением периода освоения: сокращение брака вследствие повышения квалификации ра-

ботников, повышение производительности труда, сокращение затрат на оплату труда на каждую единицу продукции, проявление «эффекта масштаба» – рост объема выпуска ведет к сокращению условно-постоянных затрат на единицу продукции. На этом отрезке темп прироста издержек ниже, чем темп роста объемов производства.

Отрезок 2-3 – предприятие эксплуатируют выше его проектной мощности, следствием является новый подъем затрат и при резком увеличении объема производства происходит скачкообразный рост затрат, обусловленный скачком условно-постоянных расходов вследствие необходимости дополнительных инвестиций.

Таким образом, прогнозирование издержек связано с оценкой влияния факторов периода освоения на производственные затраты, которое характеризуется кривой освоения, и «эффектом масштаба».

Снижение издержек вследствие влияния факторов, действующих в период освоения производства и выхода на запланированный объем выпуска продукции существенно для крупных проектов с большой долей рынка (массовое, серийное производство). Для этих типов производств характерны повторяющиеся задания с интенсивными затратами труда. Небольшие предприятия не могут претендовать на существенное снижение текущих издержек за счет освоения и проявления «эффекта масштаба», поэтому при прогнозировании текущих издержек на малых предприятиях основываются на бухгалтерской (линейной) модели поведения текущих затрат.

Для крупных проектов после определения издержек производства при выходе на запланированный уровень выпуска продукции (окончание периода освоения) обычно принимают те же допущения: переменные издержки корректируют пропорционально проценту использования мощностей, предполагая, что постоянные остаются практически неизменными, и не составляют прогноз для каждой статьи отдельно.

Если есть информация об издержках на изделия – аналоги за прошлые периоды, для оценки и прогнозирования себестоимости могут быть использованы методы, основанные на анализе ретроспективной информации.

*Методы оценки затрат, основанные на анализе издержек прошлых лет:*

- визуальный метод (метод визуального контроля);
- метод максимума-минимума;
- метод линейного регрессионного анализа и другие методы статистического моделирования.

Эти методы позволяют строить функциональные зависимости типа:

$$y = ax + b,$$

где  $y$  – полные текущие издержки;  $a$  – переменные издержки на единицу продукции;  $b$  – значение постоянных затрат;  $x$  – независимая переменная, выражает объем производства. Возможно построение и более сложных функций затрат и использование их в прогнозировании динамики себестоимости.

Метод визуального контроля (визуальный метод) требует нанесения всех наблюдений на график рассеяния и последующего проведения визуально аппроксимирующей эти данные линии. Недостаток этого метода заключается в высокой степени субъективизма и недостаточной точности.

Метод максимума-минимума является самым дешевым и простым из трех рассматриваемых методов. Он основан на построении функции издержек путем изучения всего лишь двух измерений, представляющих собой самые высокие и самые низкие издержки или, альтернативно, самый высокий и самый низкий уровни объема продаж (прибыли) прошлых периодов в интервале наблюдений. Метод максимума-минимума, так же как и предыдущий, не позволяет определить точность и достоверность полученных оценок.

Выбор периода для изучения прошлых издержек связан с достижением компромисса между необходимостью получения высокого уровня статистической достоверности результатов и затратами для реализации этого требования.

Для крупных инновационных проектов, например, в аэрокосмической отрасли, текущие издержки могут быть оценены с использованием методик, основанных на *методе статистического моделирования* затрат от параметров изделия:

$$C1 = a M Kn,$$

где  $C1$  – затраты на изготовление первого промышленного серийного изделия (партии, серии изделий);  $a$  — коэффициент, определяемый эмпирически;  $M$  – масса изделия;  $K_n$  – коэффициент новизны.

Затраты на изготовления  $n$ -го серийного образца изделия ( $C_n$ ) определяются с учетом кривой освоения:

$$C_n = C1 \cdot K_{осв},$$

где  $K_{осв}$  – коэффициент освоения.

*Пример.* Проектом предусматривается заключение договора на производство 8 самолетов. На основании прошлого опыта работы предприятия известно, что при увеличении объема производства вдвое затраты на производство единицы изделия сокращаются в среднем на 70%. Стоимость нормо-часа равна «с». На производство первого самолета необходимо 50,00 нормо-часов. Определить затраты на производство 8 самолетов.

Таблица 3.2

Суммарное количество единиц	Среднее время на единицу, нормо-час	Общее время, нормо-час	Общие издержки, у.е.
1	50,00	50	50 * с
2	35,00 (50-0,7)	70	70 * с
4	24,50 (35-0,7)	98	98 * с
8	17,15 (24,5-0,7)	137,2	137,2 * с

При прогнозировании издержек следует уделить внимание проблеме инфляции: ее динамику следует прогнозировать по отдельным статьям. Ввиду многочисленности статей накладных расходов невозможно оценить их инфляционный рост отдельно. Поэтому следует давать обоснованную оценку общего темпа инфляции накладных расходов.

### **Оценка инвестиционных издержек**

Инвестиционные издержки – это имущественные вложения предприятия для осуществления хозяйственной деятельности. Инвестиционные издержки обычно распределяются по

таким статьям, как строительство, оборудование, монтаж, покупка технологии и др., в зависимости от конкретных условий проекта. Хотя распределение инвестиционных расходов значительно меняется в зависимости от типа проекта, для отдельных отраслей могут быть разработаны типовые структуры издержек с процентным распределением затрат по отдельным направлениям инвестиционных вложений, что существенно облегчает процесс формирования бизнес-планов крупных инвестиционных проектов. Важнейшей процедурой с позиций прогнозирования финансовых результатов проекта является отнесение каждого инвестиционного этапа проекта к определенному типу актива и определение способа списания инвестиционных затрат в эксплуатационном периоде. Данная задача представляет определенную проблему для сложных проектов, когда довольно трудоемко сделать подобный расчет «вручную».

Первоначальные инвестиционные издержки определяют-ся как сумма инвестиций в основной капитал, чистый оборотный капитал, организационные и другие предпроизводственные расходы.

Основной капитал представляет собой ресурсы, требуемые для сооружения и оснащения предприятия, а чистый оборотный капитал необходим для его эксплуатации. Чистый оборотный капитал равен текущим активам за вычетом краткосрочных обязательств. Если размер чистого оборотного капитала, включенного в инвестиционные издержки, занижен, то для проекта могут возникнуть серьезные проблемы с ликвидностью. Поскольку чистый оборотный капитал рассчитывается за вычетом краткосрочных пассивов, он должен финансироваться за счет собственных средств или долгосрочных обязательств (однако краткосрочные, например, сезонные пики, возникающие в течение хозяйственного года, могут финансироваться за счет кратко- или среднесрочного кредита). Планирование чистого оборотного капитала включает определение потребности в первоначальном оборотном капитале, а также оценку ее изменения в процессе эксплуатации предприятия.

Под организационными и другими предпроизводственными расходами понимаются издержки, связанные с подготовительными мероприятиями, необходимыми для начала про-



изводства. К ним относятся, например, расходы на консультации, на центральную администрацию, издержки на предпроизводственный маркетинг, на обучение, различные налоги, пошлины, расходы на регистрацию предприятия, эмиссию ценных бумаг, разработку бизнес-плана и т.п. Особенность таких инвестиций состоит в том, что трудно определить срок их возврата.

При распределении предпроизводственных расходов обычно придерживаются одного из двух правил:

1) все предпроизводственные расходы могут быть капитализированы и амортизированы в течение определенного количества лет в соответствии с действующим законодательством;

2) часть предпроизводственных расходов может быть первоначально отнесена, если это возможно, к соответствующей статье основного капитала, и амортизируется сумма тех и других.

### **Методы оценки инвестиционных издержек в основном капитале**

1. *Экспоненциальная оценка издержек* – применяется, если имеются данные прошлого периода об аналогичных типах предприятий или оборудования. Она основана на следующей функции:

$$(C1/C2)^n = P1/P2,$$

где  $C1/C2$  – относительные издержки;  $P1/P2$  – относительный размер двух предприятий (или их оборудования);  $n$  – экспоненциальный коэффициент, обычно меняется в пределах от 0,6 до 0,7.

2. *Факторная оценка* – применяется, если имеются подходящие и (или) скорректированные данные прошлых периодов. Метод состоит в определении затрат на основное оборудование предприятия (производственный план) и последующем использовании коэффициентов (по вспомогательному оборудованию и др. видам основных средств).

3. *Оценка, основанная на полном расчете* для каждого компонента инвестиционных затрат (бюджетная). Бюджетная оценка базируется на карте технологического процесса, подробном перечне оборудования и затрат на главные его элементы (которые могут быть определены через предваритель-

ные тендеры). Обычно для крупных проектов на этапе формирования бизнес-плана она не требуется, а выполняется для этих проектов на этапе осуществления проекта после его утверждения.

4. *Оценка, основанная на методе статистического моделирования*, – применяется для крупных инвестиционных проектов.

При оценке инвестиционных издержек необходимо учитывать ежегодные темпы инфляции, возможные ошибки из-за отсутствия надежных данных, непредвиденные форс-мажорные обстоятельства. Поэтому здесь предпочитают иметь квотированный диапазон затрат. По оценкам зарубежных специалистов, степень точности оценок составляет обычно плюс –минус 10%.

### **Методы оценки инвестиционных издержек в оборотный капитал**

1. *Аналоговый*. Основан на сопоставлении с балансами аналогичных предприятий. Самый простой, пригоден для применения совместно с другими методами в целях их контроля.

2. *Оценка, основанная на полном расчете* для каждого компонента оборотного капитала. Осуществляется путем анализа отдельных факторов, влияющих на потребность в оборотном капитале, т.е. анализа тех расходов, которые возникают ежедневно при полной загрузке (детальный расчет):

Оборотные средства = Ежедневные расходы × Срок, на который замораживаются средства.

Число дней покрытия (срок, на который замораживаются средства) зависит в каждом конкретном случае от числа дней задержки оплаты за отгруженную продукцию, нормативной величины производственных запасов, длительности производственного цикла изготовления продукции, длительности нахождения готовой продукции на складе до момента ее отгрузки, числа дней задержки поставляемых видов товарно-материальных ценностей после их оплаты.

3. *Анализ себестоимости в расчете на 100 долл. с оборота* и учет условий платежа:

Потребность в оборотных средствах = (Дневной оборот/100) × Затраты капитала в расчете на 100 долл. с оборота.

### **Формирование документов финансового плана**

В финансовой части бизнес-плана разрабатываются следующие документы:

- план прибылей (убытков);
- прогноз движения денежных средств (денежных потоков);
- прогнозный баланс активов и пассивов;

а также формируется стратегия финансирования и рассчитываются показатели эффективности проекта.

**Цель составления плана прибылей (убытков)** — представить в обобщенной форме результаты деятельности, планируемые предприятием с позиций получаемого в определенные периоды времени размера прибыли (убытка) и прибыльности проекта. Акцентирование внимания на отдельных составляющих прогноза зависит от того, кому адресован бизнес-план. Так, кредиторов в первую очередь интересует жизнеспособность планируемого предприятия, результаты деятельности которого смогли бы удовлетворить жесткую схему платежей по выплате займа и процентов по нему. Венчурные капиталодержатели, получая свою долю в прибыли предприятия, заинтересованы в ее потенциальном росте.

Обычно данные о соотношениях объемов продаж и прибыли сравниваются с аналогичными показателями по отрасли и в случае их существенных расхождений в бизнес-плане даются необходимые разъяснения. План прибылей и убытков отражает производственную (операционную) деятельность предприятия. Объемы продаж для нового предприятия, как правило, нарастают постепенно, а себестоимость реализованной продукции может скачкообразно изменяться и в некоторые месяцы быть непропорционально высокой, например, стартовая рекламная компания может повлечь значительный скачок себестоимости.

Поскольку наличие прибыли еще не означает наличие денежных средств у предприятия, так как в бизнесе существует временной лаг между доходами и поступлениями, расходами и выплатами (разные счета оплачиваются в разные сроки, вырученные деньги поступают не мгновенно, а с некоторым запозданием, кроме того, в бухгалтерском учете некоторые хозяйственные операции отражаются не в момент поступления или перечисления (выплаты) денежных средств, а в момент их совершения, что зависит от учетной политики предприятия), поэтому, несмотря на прибыльность проекта, в некоторые периоды времени может возникнуть нехватка денежных

средств и необходимость в краткосрочных займах. Необходимость в денежных средствах выявляется на основе анализа прогноза денежных потоков.

Денежный поток – разница между реальными (прогнозируемыми) денежными поступлениями и выплатами – деньги в кассе (денежная наличность) или на расчетном счете предприятия.

Цель прогноза денежных потоков (cash flow) – проверить синхронность поступлений и расходования средств и тем самым подтвердить постоянное наличие на банковском счета (в кассе) денежных сумм, достаточных для расчета по обязательствам.

Последовательность осуществления прогноза денежных потоков:

- определение потребности предприятия в капитале, необходимого для регулярного выполнения своих финансовых обязательств (выплат);
- выработка стратегии финансирования проекта;
- оценка эффективности использования капитала на базе дисконтированных критериев

План движения денежных потоков отражает формирование и отток денежной наличности, ее динамику от периода к периоду. Прогноз движения денежных средств учитывает:

- деньги, приходящие в течение периода (поступления, приход);
- деньги, которые будут потрачены в течение периода (выплаты, платежи, расход);
- различия между ними (избыток или дефицит) денежных средств;
- сумму денег в начале периода (начальное сальдо банковского счета);
- сумму денег в конце периода (конечное сальдо банковского счета) – показывает состояние ликвидности за каждый период.

Прогноз денежного потока показывает, в каком периоде могут быть поступления, в каком – нет, т.е. он отражает, как быстро или медленно – ваш бизнес приносит наличные деньги. Различия прогноза прибыли и денежных потоков заключаются в том, что прогноз прибыли – это финансовый результат от основной деятельности предприятия, под которой понимается деятельность предприятия, приносящая ему основные доходы.

Прогноз денежных потоков охватывает наряду с основной также инвестиционную и финансовую деятельность.

Амортизация, являясь расходом (прогноз прибыли) одновременно рассматривается как источник поступлений (прогноз денежного потока). Прогноз прибыли в отличие от прогноза денежных потоков не содержит НДС.

Инвестиционная деятельность заключается в приобретении и продаже активов. Результатом финансовой деятельности являются изменения в размере и составе источников средств предприятия: собственного капитала и заемных средств (поступления здесь: вклады владельцев предприятия, акционерный капитал, долгосрочные, краткосрочные займы; выплаты: погашение займов, дивиденды).

Прогнозирование денежного потока учитывает временной лаг между расходами и выплатами, доходами и поступлениями, в результате которого в каждый момент времени расходы не равны выплатам, а доходы – поступлениям.

В общем случае затраты к определенному моменту приводят к выплатам, но не все доходы приводят к поступлениям (безнадежные долги).

Составление прогноза денежных потоков осуществляется на основе трансформирования (трансформационных счетов) доходов в поступления и расходов в выплаты. Схема трансформирования представлена в таблице 3.3. Планирование дебиторской и кредиторской задолженностей (трансформационных квот) осуществляется следующими методами:

1. На основе информации о прошлых периодах, например, 15% возникшей дебиторской задолженности трансформировались в поступления (были погашены) в том же месяце; 26% – в следующем; 40% – в третьем; 7% – в четвертом; 6% – в пятом; 4% – в шестом с момента возникновения задолженности.

2. Оценка от оборота. Используя сделанные прогнозные расчеты по объему реализации, можно рассчитать сумму дебиторской и кредиторской задолженностей, задавая значения показателей, которые считаются нормальными для данного бизнеса. Например, дебиторская задолженность не должна превышать величину кредиторской задолженности и не может быть больше какой-то конкретной величины, например, месячного объема реализации.

*Схема трансформирования*

Доходы – Расходы	Корректировка	Поступления – Выплаты
Выручка от реализации	- Увеличение дебиторской задолженности + + Уменьшение дебиторской задолженности + + Увеличение полученных авансовых платежей – – Уменьшение полученных авансовых платежей	= Поступления от реализации
Расходы на материалы	- Увеличение кредиторской задолженности + Уменьшение кредиторской задолженности + Увеличение выданных авансов – Уменьшение выданных авансов	= Выплаты за материальные ресурсы
Другие расходы по основной деятельности (зарплата, страховка, др.) (за исключением нижеперечисленных)	+ Увеличение расходов будущих периодов – – Уменьшение расходов будущих периодов + + Уменьшение начисленных обязательств – – Увеличение начисленных обязательств	= Оплаченные др. расходы (выплаты по другим расходам)
Начисленная амортизация	– Начисленная амортизация	= 0
Начисленный налог на прибыль	+ Уменьшение задолженности по налогу – – Увеличение задолженности по налогу	= Выплаты по налогу
Инвестиции в основные средства Выручка от реализации основных средств Инвестиции в оборотные средства	В соответствии с графиком осуществления	= Выплаты и поступления в инвестиционном секторе
Денежные средства полученные от выпуска акций Кредиты Погашение кредитов Выплата дивидендов	В соответствии с графиками	= Выплаты и поступления в финансовом секторе

Общий основной принцип здесь: сочетание быстрой инкассации и замедления выплат, что приводит к получению максимального объема свободных денежных средств. Главная идея методов инкассации и выплат – как можно быстрее конвертировать в наличные дебиторскую задолженность, а

оплачивать счета кредиторов настолько позже, насколько это возможно и не нанесет вреда имиджу предприятия и согласуется с законом.

Основными анализируемыми показателями прогноза денежных потоков являются: суммарная величина денежного потока от производственной деятельности, а также величина расходов на инвестиции. Достаточным считается такое количество собственного и привлеченного (заемного) капитала, при котором величина денежного потока в каждый период времени будет положительной. Наличие отрицательной величины денежного потока означает, что предприятие не в состоянии покрывать свои расходы, т.е. фактически является банкротом. Далее возникает задача, относящаяся к области управления наличностью: задача оптимизации ее уровня, который зависит от потребностей в ней, процентных ставок по рыночным ценным бумагам и стоимости перевода наличности в ценные бумаги и обратно.

**Цель составления прогнозного баланса** активов и пассивов при формировании бизнес-плана заключается, во-первых, в оценке финансового состояния предприятия с точки зрения финансового риска и характера использования активов, во-вторых, в арифметической проверке прогнозов прибыли и движения денежных средств.

Прибыль – мера долгосрочного успеха бизнеса; движение денежной наличности характеризует фактическую оплату счетов; баланс показывает, какие нужны фонды для воплощения бизнес-плана и как их профинансировать. Прогнозный баланс для целей бизнес-планирования в общем случае не совпадает с формой бухгалтерского баланса: использует агрегированные данные, а события, наступление которых прогнозируется в балансе, носят вероятностный характер. Отличия вытекают из необходимости не глубокого изучения документа, а лишь проверки наличия (отсутствия) в нем опасных симптомов, поэтому имеет смысл использовать только наиболее значимые для предприятия статьи. Если затраты на составление прогнозного баланса для предприятия несущественны, то не исключается возможность использования формы, идентичной, стандартной для составления отчетного баланса.

При формировании бизнес-плана проектируется стартовый баланс (баланс на начало деятельности) или баланс конца последнего отчетного периода (для действующего предприятия) и баланс на конец первого года деятельности.

Таким образом, чтобы разработать прогноз баланса на конец периода (как правило, первого года деятельности) начинают со стартового (начального) баланса (шаг 1).

Чтобы определить новый размер основного капитала, следует прибавить любые приобретенные основные фонды к соответствующей категории (статье) актива баланса (шаг 2). Источником информации для этого шага является прогноз движения денежной наличности с учетом погашения износа основных средств на конец первого года.

Оборотные активы, обычно состоящие из запасов (незавершенное производство, готовая продукция, др.), дебиторов и денежных средств (в кассе, расчетном счете), прогнозируются из проектируемого уровня продаж, особенностей производственного процесса и складирования, размера дебиторской задолженности (см. расчет потребности в оборотном капитале) и суммы сальдо движения денежной наличности (см. cash-баланс на конец периода). Заключительные дебиторы могут быть рассчитаны из прогноза продаж (прогноз прибыли) и прогноза денежных поступлений:

Начальные дебиторы + Общий объем продаж – Наличные от продаж = Заключительные дебиторы.

Конечные запасы планируются следующим образом:

Начальные запасы + Закупки – Стоимость проданных товаров = Конечные запасы.

Когда известны конечный размер запасов и заключительные дебиторы, прибавив cash-баланс на конец периода, получаем раздел прогнозируемого баланса «Оборотные активы».

Краткосрочные пассивы – это те долги, которые должны быть выплачены в течение года. Они состоят в основном из кредиторской задолженности, задолженности перед бюджетом (НДС и на прибыль).

Расчет коммерческих кредиторов в конце первого года деятельности осуществляется так же, как и для дебиторов:

Начальные кредиторы + Закупки – Оплата поставщикам = Заключительные кредиторы.



Размер налога НДС, который должно предприятие бюджету, рассчитывается сложением всех налогов НДС, подлежащих получению, и затем вычитанием всех налогов, подлежащих уплате за расчетный период.

Долгосрочные пассивы – это долги, которые подлежат уплате в течение более года. Чтобы рассчитать, каков должен быть объем этих обязательств на конец прогнозируемого периода, необходимо к начальным долгосрочным обязательствам прибавить займы, осуществленные в течение этого периода, и вычесть сумму денег, уже выплаченных по обязательствам за это время (прогноз денежных поступлений и выплат).

Собственные средства предприятия на конец года составят размер собственного капитала на начало деятельности (уставный капитал) плюс прибыль этого года (из прогноза прибылей (убытков)).

*Пример.* Бизнес-планом предусматривается открыть магазин с 1 января 1999 г. На первый хозяйственный год запланированы следующие показатели:

1. Реализация товаров на сумму 120 000 у.е. осуществляется равномерно в течение всего года при средней торговой наценке в 25% от цены реализации. Половина товаров продается за наличные, оставшаяся часть – на условиях одномосячного кредита.

2. Число оборотов товарного запаса запланировано 4 раза в год.

3. Начальный товарный запас должен соответствовать будущему среднегодовому товарному запасу. 10% его стоимости оплачивается наличными; 40% – 1 июля 1999 г.; оставшаяся часть (50%) – 1 апреля 2000 г. Текущие товарные запасы пополняются на условиях двухмесячного кредита.

4. Зарплата составляет 750 у.е. в месяц.

5. Арендная плата – 150 у.е. в месяц. 1 января 1999г. выплачивается авансом 3-х месячная арендная плата.

6. Оборудование приобретается на сумму 4 000 у.е. Половина стоимости оплачивается 1 июля 1999 г.; остальная часть – 1 января 2000 г.

7. Остальной основной капитал, необходимый для открытия предприятия (транспорт, кассовые аппараты, др.), составляет 1500 у.е. Стоимость его оплачивается 1 марта 1999 г.

8. Стоимость стартовой рекламной кампании в размере 1 000 у.е. оплачивается 1 февраля 1999 г. Начиная с февраля 1999 г. издержки на рекламу составят 100 у.е. в месяц и будут оплачиваться наличными.

9. Прочие ежегодно возобновляемые постоянные издержки составляют 20% от торговой наценки, распределяются равномерно и оплачиваются наличными (страховые взносы, налоги, отопление и др. коммунальные платежи).

10. Первоначальный капитал учредителя: учредитель вносит 1 января 1999г. 5 000 у.е. наличными и предоставляет подержанный грузовой автомобиль стоимостью 1 000 у.е.

*Задание:* Составить план прибылей и убытков за год, учитывая, что амортизация оборудования, грузового автомобиля и прочего основного капитала, необходимого для открытия предприятия, осуществляется по линейному методу в течение 5 лет.

Б. Составить прогноз потока денежных средств с разбивкой по кварталам (величина денежных средств указывается на конец каждого квартала).

В. Составить плановый баланс на 31 декабря 1999 г.

*Решение:*

Реализация товаров:

50% реализуемых товаров продается за наличные на сумму 60 000 у.е. Ежеквартальные поступления от продажи за наличные составляют:  $60000/4 = 15000$  у.е.

Другая половина на сумму 60 000 у.е. продается на условиях одномесячного кредита. Ежемесячная стоимость товаров, продаваемых в кредит составляет:  $60000/12 = 5000$  у.е.

В первом квартале поступает оплата товаров, проданных в январе и феврале:  $5000 + 5000 = 10000$  у.е.

Во втором квартале поступает плата за товары, проданные в марте, апреле, мае:  $5000 \cdot 3 = 15000$  у.е.

В третьем и четвертом кварталах поступают такие же суммы, как и во втором квартале.

Стоимость приобретаемых товаров составляет 75% от выручки, т.е. начальный товарный запас равен  $120000 \cdot 0.75 = 90000$  у.е.

Стоимость среднегодового товарного запаса равна  $90000/4$  или  $(90000/360 \text{ дн.}) \cdot 90 \text{ дн.} = 22500$  у.е. (поскольку число оборотов товарного запаса равно 4 раза в год, или 90 дней).

Начальный запас:

- в первом квартале оплатили:  $22500 \cdot 0.01 = 2250$  у.е.;
- во втором оплата составляет — 0;
- в третьем квартале оплатили:  $22\ 500 \cdot 0.4 = 9\ 000$  у.е.;
- в четвертом — 0

Кредиторская задолженность на 1 января 2000г. составляет 11 250 у.е..

Прочие ежегодно возобновляемые постоянные издержки (20% от торговой наценки) равны:  $0.2 \cdot 120000 \cdot 0.25 = 6000$  у.е. или  $6000/4 = 1500$  у.е. в квартал, оплачиваются равномерно и наличными, следовательно по этим видам затрат выплаты составляют 1500 у.е. ежеквартально. Прогноз денежного потока представлен в таблице 3.6.

Основной капитал, необходимый для открытия предприятия:

- 1) амортизация составляет  $1500/5 = 300$  у.е. в год;
- 2) остаточная стоимость на конец года :  $1500 - 300 = 1200$  у.е.
- 3) Оборудование: амортизация:  $4000/5 = 800$  у.е. в год; остаточная стоимость на конец периода равна  $4000 - 800 = 3200$  у.е.
- 4) Грузовой автомобиль: амортизация составляет  $1000/5 = 200$  у.е. в год; остаточная стоимость на конец периода равна  $1\ 000 - 200 = 800$  у.е.
- 5) Товарная дебиторская задолженность: задолженность в связи с формированием начального запаса:  $22500 - (2250 + 9000) = 11250$  ; задолженность по текущим закупкам:  $2 \cdot 7500 = 15000$  у.е.;
- 6) Задолженность поставщикам оборудования:  $4000 - 2000 = 2000$  у.е.

План прибылей и убытков, прогноз денежного потока, прогноз баланса см. таблицы 3.4 – 3.6.

Таблица 3.4

*План прибылей и убытков*

Показатель	1999г
1. Выручка	120 000
2. Издержки на приобретение товаров	90 000
3. Зарплата	9 000
4. Арендная плата	1 800
5. Реклама	2 100
6. Прочие ежегодно возобновляемые постоянные издержки	6 000
7. Амортизация:	
основного капитала, необходимого для открытия фирмы;	300
оборудование	800
грузовой автомобиль	200
Прибыль за год	+ 9 800

Таблица 3.5

*Баланс на 31 декабря 1999 г.*

АКТИВ		ПАССИВ	
1.Основной капитал, необходимый для открытия фирмы	1200	1.Собственный капитал	6 000
2. Оборудование	3 200	2. Прибыль	9 800
3. Грузовой автомобиль	800	3. Задолженность поставщикам оборудования	2 000
4. Товарный запас	22 500	4. Товарная кредиторская задолженность, в т.ч.:	26 250
5. Арендная плата (задаток)	450	долгосрочная	11 250
6. Товарная дебиторская задолженность	5 000		
7. Денежные средства	10 900		
Итого:	44 050	Итого:	44 050

Таблица 3.6

*Прогноз денежного потока*

Показатель	1 кв.	2 кв.	3 кв.	4 кв.
1. Продажа за наличные	15 000	15 000	15 000	15 000
2. Продажа в кредит	10 000	15 000	15 000	15 000
3. Материальные затраты	7 500	22 500	22 500	22 500
4. Зарплата	2 250	2 250	2 250	2 250
5. Арендная плата	900	450	450	450
6. Реклама	1 200	300	300	300
7. Прочие ежегодно возобновляемые постоянные издержки	1 500	1 500	1 500	1 500
Cash flow от основной деятельности	+ 11 650	+ 3 000	+ 3 000	+ 3 000
8. Выплаты на приобретение оборудования			2 000	
9. Приобретение др. основного капитала, необходимого для открытия фирмы	1 500			
10. Выплаты на приобретение начального товарного запаса	2 250		9 000	
Cash flow от инвестиционной деятельности	- 3 750		- 11 000	
11. Первоначальный капитал (наличные)	5 000			
Cash flow от финансовой деятельности	5 000			
Cash-баланс на начало квартала	0	+ 12 900	+ 15 900	+ 7 900
Cash-баланс на конец квартала	+ 12 900	+ 15 900	+ 7 900	+ 10 900

Прогнозный баланс в данном примере действительно сбалансирован, и собственный капитал (акционерные средства) на конец года ( $6000 + 9800 = 15800$ ) равен чистым активам ( $44050 - 15000 = 29050$ ) минус долгосрочные пассивы ( $2000 + 11250 = 13250$ ). На практике существует вероятность несовпадения актива и пассива (активы и источники собственных и заемных средств прогнозируются независимо друг от друга). Расхождение между ними называется «пробкой». Когда рост активов прогнозируется более быстрым, чем рост обязательств и собственных средств, отрицательную «проб-

ку» можно ликвидировать с помощью внешнего финансирования – увеличение акционерного капитала или наращивание заимствований. Если рост активов прогнозируется более медленным, чем рост обязательств – положительная «пробка». Она ликвидируется отказом от части заимствований, доходным инвестированием в ценные бумаги, учредительством и т.д. Несбалансированность активов и пассивов может возникнуть вследствие ошибок в прогнозе прибыли, движении денежных потоков, балансе.

Наиболее распространенные ошибки возникают в позициях, вызывающих основную разницу между прибылью и поступлениями денежных средств, поэтому ошибка в балансе может непосредственно повлиять на эти величины. Чтобы выявить ошибку, необходимо проверить разницу между продажей и денежными поступлениями с продаж. Затем – проверить стоимость продаж, запасов материалов, закупок и кредитов и затем – проверить расчет амортизации.

Таким образом, все документы финансового плана взаимосвязаны, и если где-то произошла ошибка, то проявится она в балансе (не будет сбалансирован). При этом важны здесь не детали, как уже говорилось, а лишь наиболее важные соотношения: ликвидность (общий коэффициент покрытия), финансовый рычаг, структура активов и обязательств, например, наличие «мягких» (нематериальных) активов может быть оценено инвестором как опасный симптом.

Принцип итеративности формирования бизнес-плана проявляется здесь в том, что получение нежелательного результата на этом этапе ведет к переоценке всех остальных разделов бизнес-плана. Как правило, прежде чем бизнес-план примет нормальные очертания, потребуются многократные изменения и притирка данных. Ориентирами здесь служат минимум средств и уровень прибыльности предприятия. Обычно в бизнес-плане рассматривается несколько альтернативных вариантов финансовых планов, основанных на различных прогнозных оценках относительно объемов продаж: пессимистическом, оптимистическом и наиболее вероятном.

В заключительной части финансового плана излагается стратегия финансирования, и рассчитываются показатели эффективности проекта.

Разработка **стратегии финансирования** включает решение следующих задач:

- определение суммы средств, требующейся для реализации проекта;
- определение источников получения этих средств (выпуск акций, долговое финансирование, лизинговое финансирование, др.);
- разработка схемы погашения кредита.

При этом рассматриваются несколько схем финансирования, каждая из которых оценивается по последствиям ее применения.

Обобщенно все виды источников инвестиций можно разделить на четыре группы:

- собственные средства предприятия,
- субсидии, гранты, дотации от государства,
- средства с фиксированной суммой процента,
- привлеченные средства, на которые выплачивается дивиденд.

Государственными дотациями обеспечиваются предприятия приоритетных направлений экономики. Средствами с фиксированной суммой процента служат кредиты, облигации, выпускаемые предприятием, привилегированные акции. По каждому из этих заемных средств выплачивается заранее установленный процент. Кредитные соглашения обязательно предусматривают жесткую схему платежей, обеспечивающих возврат основной суммы долга и процентов по кредиту в течение срока, указанного в кредитном соглашении. Поэтому кредитное финансирование предпочтительно для проектов, связанных с расширением, перевооружением производства на уже действующих – и действующих успешно – предприятиях. К привлеченным средствам, на которые выплачивается дивиденд, относятся паевой и акционерный капитал. Инвестиции этого рода лишены предыдущих недостатков: в первые годы реализации проекта можно вообще не платить дивиденды (акционеры осведомлены, что прибыль инвестируется в развитие предприятия, а не используется не по назначению). Эти источники финансирования предпочтительны для проектов, предусматривающих открытие нового предприятия, или

для проектов, связанных с реализацией технических новшеств. В конечном счете, выбор источника финансовых средств зависит от характера проекта, ситуации на кредитном рынке, условий получения кредита.

Система показателей эффективности проекта состоит из показателей оценки финансового состояния (балансовых соотношений) и показателей эффективности инвестиций (чистой текущей стоимости, рентабельности инвестиций, внутренней нормы прибыли, срока окупаемости инвестиций и др.).

Приемлемость бизнес-плана определяется следующими факторами: эффективностью проекта, прежним опытом работы предприятия в выбранной сфере бизнеса, портретом предприятия на фоне отрасли, рейтингом инвестиционной привлекательности отрасли, весомостью (значимостью) руководящей команды, условиями инвестиционного соглашения, уникальностью идеи и другими особенностями проекта, например, его близостью к идеальному для инвестора варианту.

Основным критерием приемлемости проекта для инвестора является его финансовая осуществимость. Поскольку для финансирования проектов обычно используют различные источники, то каждая из сторон такого совместного финансирования должна иметь свои собственные критерии оценки, в том числе приемлемую минимальную прибыль на соответствующую долю капитала. Однако при подготовке бизнес-плана обычно еще неизвестно, как окончательно будет финансироваться проект. Поэтому сначала определяют эффективность проекта в целом, а затем оценивают индивидуальную эффективность для каждого участника финансирования.

Остановимся кратко на особенностях инвестиционного проектирования в условиях Республики Беларусь.

Сложившаяся экономическая обстановка в республике характеризуется весьма незначительным уровнем внешнего (зарубежного) инвестирования и отсутствием свободных денежных средств на счетах большинства белорусских предприятий. Особенно сдерживает внутреннее инвестирование отсутствие на счетах достаточного объема валютных средств, что является следствием неразвитости экспорта по причинам низкого качества продукции и высокой ее себестоимости.



Ясно, что в сложившихся условиях приобретение высокотехнологичного зарубежного оборудования за счет внутренних ресурсов – задача почти неразрешимая.

Поэтому основными источниками финансирования инвестиционных проектов остаются кредиты белорусских и некоторых иностранных банков (включая Европейский Банк Реконструкции и Развития), активность которых также оставляет желать лучшего.

Основной трудностью при получении банковских кредитов является необходимость внесения в проект как минимум трети собственных средств. При этом не обязательно использовать собственный капитал – в проекте в качестве собственных средств могут присутствовать, например, надлежащим образом оцененные недвижимость, оборудование и даже запасы сырья. Основные трудности при получении кредита возникают именно на этапе оценки этих материальных активов, поскольку банки отказываются рисковать, выдавая кредит под залог сильно изношенного и морально устаревшего оборудования и недвижимости, права собственности на которую, как правило, весьма сомнительны.

В случае, если этап оценки вносимых собственных средств успешно преодолен, возникает следующая проблема: при оценке финансовых параметров инвестиций, например, чистого приведенного дохода, банки стремятся рассматривать денежный эквивалент вносимых собственных средств как прямые начальные инвестиции. Последнее является методически неверным приемом и обычно приводит к заниженной оценке или попросту отклонению весьма прибыльных проектов.

При разработке бизнес-плана следует предусматривать использование наряду с долгосрочными инвестиционными кредитами, также и дорогие краткосрочные кредиты на покупку сырья, авансирование и т.д. Характерной ситуацией при этом является необходимость получения долгосрочного кредита для приобретения импортного оборудования в иностранной валюте в одном банке, а краткосрочных кредитов в национальной валюте для закупки отечественного сырья – в другом банке. Ясно, что в сложившейся ситуации, отягощенной вдобавок существенной инфляцией, банки, вопреки офи-

циальной политике требуют предоставления всех финансовых расчетов в свободно конвертируемой валюте. Наличие нескольких валютных курсов существенно осложняет при этом переговоры с банками.

### 3.4. Дисконтированные финансовые параметры инвестиций, методы их расчета и их роль в оценке эффективности инвестиционных проектов

В настоящее время для оценки финансовой стороны планируемых инвестиций принято использовать дисконтированные параметры эффективности. При этом чаще всего применяются следующие показатели: чистый приведенный доход, внутренняя норма доходности, срок окупаемости капитальных вложений, рентабельность проекта, точка безубыточности. Перечисленные показатели являются результатами сопоставлений распределенных во времени доходов с инвестициями и затратами на производство. Как показывают исследования, за рубежом наиболее часто используются два основных показателя: чистый приведенный доход (Net Present Value, *NPV*) и внутренний коэффициент окупаемости (Internal Rate of Return, *IRR*).

Таблица 3.7

*Частота использования финансовых показателей  
(данные опроса 103 крупнейших нефтяных и газовых компаний США в 1983 г.)*

Показатель эффективности	Тип применения	
	Основной измеритель	Вспомогательный измеритель
<i>IRR</i>	69%	14%
<i>NPV</i>	32%	39%
Другие показатели	12%	21%

Чистый приведенный доход (*NPV*) представляет собой разность дисконтированных на один момент времени (обычно на год начала реализации проекта) показателей дохода и капиталовложений. Потоки доходов и капитальных вложений обычно представляются в виде единого потока – чистого потока платежей, равного разности текущих доходов и расходов.

Представим формулу для расчета чистого приведенного дохода при заданной норме дисконтирования в виде:

$$NPV = \sum_{t=t_n}^T \frac{P_t}{(1+d)^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{KV_t}{(1+d)^t}, \quad (3.1)$$

где  $d$  – величина ссудного процента, или норма дисконтирования, %;

$t_n$  – год начала производства продукции;

$t_c$  – год окончания строительства по проекту;

$KV_t$  – инвестиционные расходы (капитальные вложения) в году  $t$ , руб.;

$P_t$  – чистый поток платежей (доходов) в году  $t$ , руб.;

$T^t$  – время реализации инвестиционного проекта в годах.

Необходимо отметить, что в данном случае предполагается существование совершенного рынка капитала, на котором существует единая расчетная процентная ставка. Исходя из этого, обычно  $NPV$  оценивается путем задания  $d$ , равным средней учетной банковской ставке в стране инвестора или равным другому значению, соответствующему норме прибыли при вложении капитала в другие проекты и ценные бумаги.

При оценке инвестиционных расходов наиболее важным является учет источников средств, которые использовались при выплатах (весь капитал или только заемные средства). В остальных методы расчета инвестиционных расходов почти не различаются. Для определения доходов используются существенно различающиеся схемы.

Например, рекомендуется исключить из суммы доходов амортизационные отчисления, или предлагается включать не только накапливаемые амортизационные отчисления, а также и ликвидную стоимость основных производственных фондов (на последнем шаге расчета).

Такое различие вычислительных схем при расчете доходов определяется различием в отчетных документах зарубежных и российских и белорусских компаний и фирм. Зарубежные компании по итогам своей деятельности за год помимо отчета о прибылях и убытках представляют отчеты об источниках и использовании фондов (отчет о фондах и их использовании), в которых денежные средства накапливаются за счет

чистой прибыли, амортизационных отчислений, нового акционерного капитала, кредитов и других доходов.

Определяемые таким образом фонды распределяются для выплаты дивидендов акционерам, приобретения недвижимости, машин и оборудования, увеличения оборотного капитала и т.д. При этом на расширение основных производственных фондов затрачивается средств не менее, чем получено в результате амортизационных отчислений, т.е. свободные денежные средства компании должны работать на расширение и модернизацию производства. Аналогичной отчетности для российских предприятий не предусмотрено.

Необходимость учета ликвидной стоимости основных производственных фондов при определении чистого приведенного дохода определяется назначением инвестиций. В случае замены оборудования, срок службы которого соответствует продолжительности расчетного периода, учет его ликвидной стоимости необходим.

Источники финансирования проектов разделяются на две основные группы:

1. Собственный капитал – средства, предоставляемые акционерами (учредителями), который должен быть увеличен в результате реализации и последующей эксплуатации исследуемого объекта.

2. Заемный капитал – кредит банков, государства, местных органов власти или других компаний, который должен быть погашен вместе с задолженностью в установленном контрактом порядке и в заданные сроки.

Результатом инвестиций, с финансовой точки зрения, является погашение кредитной задолженности и выплаты дивидендов акционерам. При этом по мере погашения кредита увеличивается стоимость акционерного капитала. Акционер, получая дивиденды за акции, в любой момент может реализовать свои акции. При условии, что деятельность предприятия при реализации данного инвестиционного проекта будет прибыльной, чем позже он продаст свои акции, тем больше выиграет. В этом случае разумно предполагать, что акционерный капитал не будет выплачен и изъят из средств предприятия. Тогда критерии оценки эффективности капитальных

вложений должны быть определены только для заемного капитала и предназначены для партнеров, предоставивших этот капитал. Для акционеров основными будут при этом являться критерии эффективности акционерного капитала. Однако в ряде случаев такого рода разделение не может быть четко проведено, поскольку оно определяется целью инвестиции.

Если цель инвестиций – замена оборудования, то при расчете критериев эффективности капитальных вложений должен учитываться весь затраченный капитал.

При строительстве новых объектов, срок службы которых значительно превышает расчетный период, следует учитывать только заемные средства, а в некоторых случаях – сумму заемных и собственных средств.

Таким образом, чистый приведенный доход может иметь формально шесть различных значений для всех затраченных или только для заемных средств, с учетом или без учета амортизационных отчислений, а также с учетом ликвидной стоимости основных производственных фондов. Выбор схемы расчета чистого приведенного дохода зависит от конкретной ситуации.

Экономический смысл внутреннего коэффициента окупаемости *IRR* состоит в следующем. В качестве альтернативы вложения финансовых средств в инвестиционный проект рассматривается помещение тех же средств (так же распределенных во времени) под некоторый банковский процент. Распределенные во времени доходы, получаемые от реализации проекта, также помещаются на депозитный счет в банке под тот же процент. При ставке ссудного процента, равной *IRR*, инвестирование средств в проект даст в итоге тот же суммарный доход, что и помещение их на депозитный счет. Таким образом, при этой ставке ссудного процента обе альтернативы помещения финансовых средств экономически эквивалентны. Если реальная ставка ссудного процента меньше *IRR* проекта, инвестирование средств в него выгодно, и наоборот. Следовательно, *IRR* является граничной ставкой ссудного процента, разделяющей эффективные и неэффективные инвестиционные проекты. *IRR* находится как решение нелинейного уравнения относительно *d*:

$$\sum_{t=t_0}^T \frac{P_t}{(1+d)^t} - \sum_{t=0}^{t_0} \frac{KV_t}{(1+d)^t} = 0. \quad (3.2)$$

Зависимость чистого приведенного дохода от процентной ставки имеет вид, изображенный на рис. 3.5, только в том случае, если имеют место изолированно осуществляемые инвестиции, то есть превышение поступлений над выплатами на протяжении всего планового периода идет только на уплату процентов по внутренней процентной ставке и на амортизацию затраченного капитала.

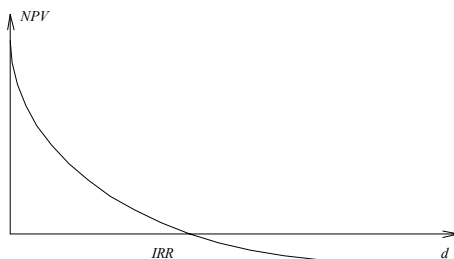


Рис. 3.5. Зависимость чистого приведенного дохода от значения процентной ставки

Это означает, что в плановый период капитал не реинвестируется, и внутренняя процентная ставка не зависит от процентной ставки, по которой могут быть вложены высвобожденные финансовые средства. При не изолированно осуществляемых инвестициях, например, при заемном характере инвестируемого капитала, возможны случаи, когда уравнение для расчета внутреннего коэффициента окупаемости будет иметь несколько корней или не иметь их вовсе.

За рубежом расчет коэффициента *IRR* часто применяется в качестве первого шага при финансовом анализе инвестиционного проекта. Для дальнейшего анализа отбирают те инвестиционные проекты, которые имеют *IRR* не ниже некоторого порогового значения (обычно не ниже 15-20% годовых).

Широко используется при предварительной оценке эффективности инвестиций такой важный для практики параметр, как срок окупаемости инвестиций (Payback Period, *PB*).

Срок окупаемости определяется как продолжительность периода времени, в течение которого сумма чистых доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, сравняется с суммой инвестиций.

Уравнение для периода срока окупаемости можно записать в виде:

$$\sum_{t=0}^h \frac{Pt}{(1+d)^t} = KV, \quad (3.3)$$

где  $h$  – срок окупаемости;  $KV$  – суммарные капиталовложения в инвестиционный проект.

В этом уравнении  $t=0$  соответствует моменту окончания строительства. Величина  $h$  определяется путем последовательного суммирования членов ряда дисконтированных доходов до тех пор, пока не будет получена сумма, равная объему инвестиций или превышающая его.

Введем

$$Sm = \sum_{t=0}^m \frac{Pt}{(1+d)^t}, \quad (3.4)$$

причем  $Sm < KV < Sm+1$ .

Тогда срок окупаемости приблизительно равен:

$$h = m + \frac{KV - Sm}{P_{m+1}} (1+d)^{m+1}. \quad (3.5)$$

Очевидно, что на величину срока окупаемости, помимо интенсивности поступления доходов, существенное влияние оказывает используемая норма дисконтирования доходов.

На практике срок окупаемости может быть равен бесконечности.

Естественно, что наименьший срок окупаемости соответствует отсутствию дисконтирования доходов, монотонно возрастающая по мере увеличения ставки процента. При отсутствии дисконтирования эта ситуация возникает, только если срок окупаемости больше периода получения доходов. При дисконтировании доходов срок окупаемости может просто не существовать (стремиться к бесконечности) при определенных соотношениях между инвестициями, доходами и нормой дисконтирования.

Если положить  $Pt$  постоянной величиной, то при  $h \rightarrow \infty$  сумма  $Sh = \sum_{t=0}^h \frac{1}{(1+d)^t}$ , равна  $S = \frac{1+d}{d}$ . Очевидно, при любом конечном  $h$   $Sh < S$ .

Отсюда следует, что необходимым условием существования конечного срока окупаемости  $h$  является выполнение неравенства

$$\frac{P}{KV} > \frac{d}{1+d}. \quad (3.6)$$

Важным параметром в оценке инвестиций является дисконтированная рентабельность

Рентабельность (Benefit Cost Ratio), или индекс доходности (Profitability Index, PI) инвестиционного проекта представляет собой отношение приведенных доходов к приведенным на ту же дату инвестиционным расходам:

$$R = \frac{\sum_{t=ln}^T \frac{Pt}{(1+d)^t}}{\sum_{t=0}^{tc} \frac{KVt}{(1+d)^t}}. \quad (3.7)$$

При норме дисконтирования, меньшей  $IRR$ , рентабельность больше 1. Таким образом, превышение над единицей рентабельности проекта означает его дополнительную доходность при рассматриваемой ставке процента. Случай, когда рентабельность проекта меньше единицы, означает его неэффективность при заданной ставке процента.

В литературе по финансовому анализу можно найти десятки различных показателей качества инвестиционных проектов, однако именно рассмотренные выше четыре параметра приняты как определяющие при принятии решений об инвестировании в большинстве белорусских банков, а также в Европейском Банке Реконструкции и Развития и Российской Финансовой Корпорации.



### **3.5. Оценка дисконтированных финансовых параметров инвестиций в условиях неопределенности. Типы неопределенностей и взаимосвязь между ними**

В настоящее время традиционный подход к расчету  $NPV$ ,  $IRR$  и других дисконтных параметров подвергается вполне заслуженной критике ввиду того, что значения будущих доходов  $P_t$ , затрат  $KV_t$  и процентных ставок  $d$  – весьма неопределенные величины. При этом имеющие место неопределенности, в отличие от случая прогнозирования курсов акций, не могут быть адекватно описаны в теоретико-вероятностных терминах. В реальных ситуациях инвестор или привлекаемые им эксперты в состоянии уверенно указать лишь интервалы, в пределах которых могут оказаться значения  $P_t$ ,  $KV_t$  и  $d$ , и наиболее ожидаемые значения внутри этих интервалов. В итоге возникает проблема разработки адекватной методики расчета финансовых показателей проектов при наличии такого рода неопределенностей, имеющих зачастую субъективную природу. Кроме того, требует решения весьма существенная проблема оценки риска инвестиций.

В настоящее время наибольшее распространение получили методики анализа эффективности и риска инвестиций на основе теоретико-вероятностного подхода.

В самом общем виде финансовый риск можно рассматривать как степень определенности финансовой потери, выражающейся в:

- а) возможности не достичь поставленной цели;
- б) неопределенности прогнозируемого результата;
- в) субъективности оценки прогнозируемого результата.

Возможна и другая интерпретация риска — как степени вариабельности дохода, который может быть получен благодаря владению данным видом активов.

Существует множество подходов к количественной оценке риска, которые обычно представляют собой различные модификации анализа чувствительности конъюнктуры (sensitivity analysis) или анализа вероятностного распределения доходности (probability distributions).

Например, в рамках рекомендаций Всемирного Банка по анализу инвестиций указываются три основные методики:

- анализ чувствительности, при котором исследуется влияние определенных (5%, 10% и др.) вариаций наиболее важных для проекта входных параметров (размера инвестиций, динамики доходов и расходов, нормы дисконтирования и пр.) на устойчивость оценок эффективности проекта;

- метод статистических испытаний, при котором значения недетерминированных ключевых входных параметров выбираются случайно в соответствии с известной процедурой типа Монте-Карло (при помощи генератора случайных чисел);

- метод сценариев, когда опытные эксперты прорабатывают несколько типовых вариантов развития событий по проекту соответствующих значений динамики выпуска продукции, доходов и расходов и др.

Существуют и жесткие нормативные ограничения риска с четкой формулировкой метода его расчета. Например, для банков Республики Беларусь для оценки крупных рисков введен максимальный размер риска на одного заемщика.

Следует отметить, что этот норматив по методике построения близок к концепции эмпирического риска. Однако его детерминированный характер не позволяет достаточно полно учитывать неопределенность, неизбежно связанную с оценкой будущих событий. Последнее делает его малоприменимым для оценки финансового риска инвестиций.

Традиционно неопределенности, связанные с прогнозированием будущих событий в экономике, интерпретируют с теоретико-вероятностной точки зрения, что во многих практически важных случаях может приводить к неадекватным результатам.

Для того, чтобы обосновать это утверждение, а также сделать более ясной сущность предлагаемого подхода, следует рассмотреть некоторые наиболее распространенные методики количественной оценки инвестиционного риска. Дальнейшее рассмотрение будет вестись на примере оценки чистого приведенного дохода, являющегося одним из важнейших финансовых параметров оценки эффективности инвестиций.

Сущность первой методики оценки риска проекта на основе  $NPV$  заключается в исчислении размаха вариации  $NPV$ , исходя из пессимистической (п), наиболее вероятной (в) и оптимистической (о) оценок параметров, входящих в выражение (3.1). Получаемый размах вариации  $R = NPV_o - NPV_p$  рассматривается как мера риска, ассоциируемого с данным инвестиционным проектом.

Необходимо отметить, что пессимистическая, наиболее вероятная и оптимистическая оценки задаются экспертами, носят субъективный характер и не связаны с какими-либо вероятностями классической частотной природы. Методика носит чисто эвристический характер и для получения адекватных результатов требует неформального анализа в каждой конкретной ситуации ввиду необходимости учета взаимного влияния пессимистических, наиболее вероятных и оптимистических оценок параметров в выражении (3.1).

Второй подход основан на экспертной оценке вероятностей появления прогнозируемых значений доходов и инвестиционных расходов. В итоге  $NPV$  рассчитывается по той же формуле (3.1) при замене  $P_t$  и  $KV_t$  на  $Pp_t$ ,  $P_t$  и  $Pkv_t$ ;  $KV_t$  соответственно, где  $Pp_t$  и  $Pkv_t$  – экспертные оценки вероятностей соответствующих доходов и расходов в году  $t$ .

При этом считается, что увеличение риска проекта должно вести к снижению рассчитанных таким образом значений  $NPV$  по сравнению со значениями этого параметра, полученными без учета вероятностей. Однако разность  $Pp_t$ ,  $P_t$  и  $Pkv_t$ ,  $KV_t$  может оказаться больше разности  $P_t$  и  $KV_t$ , в случае, если вероятности доходов выше вероятности расходов. Кроме того, следует дополнительно остановиться на смысле используемых вероятностей, например,  $Pp_t$ . Если это вероятность осуществления события, заключающегося в том, что в году  $t$  финансовые поступления составят именно  $P_t$ , то, строго говоря, с вероятностью 1 —  $Pp_t$  можно ожидать поступления любого другого количества денег (возможно, даже очень большого), которое никак не определено. Это делает все проводимые оценки некорректными. В подобной ситуации произведения типа  $Pp_t$ ,  $P_t$  или  $Pkv_t$ ,  $KV_t$  не имеют содержательной экономической интерпретации. Иногда их называют математическим

ожиданием, что неверно, поскольку математическое ожидание рассчитывается на основе полного распределения вероятности событий, а не путем использования вероятности лишь одного из них.

Для иллюстрации необходимо рассмотреть несколько примеров.

Пусть для осуществления краткосрочного проекта стоимостью \$4000 найдены четыре инвестора, каждый из которых выделяет средства в размере \$1000 с вероятностью 0,8. Чтобы задача была определена, будем считать, что оставшаяся вероятность 0,2 – вероятность отказа инвестора. Рассчитываем математическое ожидание

$$M = 4 \cdot (0,2 \cdot 0 + 0,8 \cdot \$1000) = \$3200.$$

Очевидно, что эта цифра не имеет содержательного экономического смысла, поскольку в данном случае есть четыре дискретных события: с вероятностью 0,4096 будет получена вся требуемая сумма \$4000; с вероятностью 0,4096 – \$3000; с вероятностью 0,1536 – \$2000; с вероятностью 0,0256 – \$1000.

Другой пример.

Пусть на основе кредитной истории клиента банка установлено, что вероятность (в строго частотном, а не в субъективном смысле) возврата им ссуды в установленный срок равна 0,8. Пусть клиенту выдана ссуда \$200.

Математическое ожидание равно \$160. Очевидно, что эта цифра не имеет практического смысла, поскольку речь идет о вероятности полного погашения ссуды.

Рассмотренные выше примеры позволяют сделать вывод, что точечные оценки типа «будущая цена чего-либо и ее вероятность» не имеют содержательного экономического смысла и непригодны для оценки риска. Для получения более реальной картины будущего необходимо знать вероятности (в частотной или субъективной интерпретации) различных возможных значений будущей цены.

Более обоснованным экономически является подход к оценке риска инвестиций, сущность которого заключается в построении вероятного распределения значений доходности,

исчислении стандартного отклонения от средней доходности и коэффициента вариации, который и рассматривается как степень риска, ассоциируемого с данным активом. Таким образом, чем выше коэффициент вариации, тем более рискованным является данный вид актива. Основные процедуры этой методики состоят в следующем:

- задаются прогнозные оценки значений доходности  $K_i$  и вероятностей их осуществления  $P_i$  (все это субъективные экспертные оценки);

- рассчитывается наиболее вероятная доходность  $K_b$

$$K_b = \sum_i K_i \cdot P_i, \quad (3.8)$$

- рассчитывается стандартное отклонение ( $O_c$ )

$$O_c = \sqrt{\sum_i (K_i - K_b)^2 \cdot P_i}, \quad (3.9)$$

- рассчитывается коэффициент вариации ( $V$ )

$$V = \frac{O_c}{K_b}. \quad (3.10)$$

Действительно, если соответствующим образом отнормировать распределение  $P_i$ , чтобы оно стало соответствовать частотному, величина, рассчитываемая по формуле (3.8), будет соответствовать строгому определению математического ожидания.

Однако наиболее вероятным значением доходности она будет только в случаях симметричного распределения  $P_i$ , во всех остальных случаях математическое ожидание не имеет достаточно ясного экономического смысла и является скорее математической абстракцией. Соответственно теряют смысл параметры  $O_c$  и  $V$ . В рассматриваемой ситуации в случае несимметричного распределения (а симметрические гауссовские распределения в реальной жизни довольно редки) имеют смысл лишь доверительные интервалы и, собственно, сами исходные распределения. Далее возникает проблема обработки этих интервалов и распределений, и выполнения необходимых арифметических операций над ними. Именно отсутствие

соответствующего математического аппарата, реализующего при экономико-математическом анализе арифметику непосредственно для интервалов и распределений, является источником большинства сложностей при применении теоретико-вероятностных методов. С другой стороны, понимание необходимости разработки эффективного математического аппарата для работы с неопределенностями, в том числе и субъективной природы, осознание недостатков теоретико-вероятностных методов привело к бурному развитию и формированию новых научных дисциплин: интервальной математики, теории нечетких множеств и теории возможностей. В настоящее время можно говорить о некоторой определенности в областях применения этих методик, и весь этот комплекс новых теорий и методов (включая теорию вероятностей) движется к естественному объединению в общую теорию анализа неопределенностей.

Анализ характера неопределенностей, проявляющихся в финансовой оценке эффективности инвестиций, позволяет сделать вывод, что их адекватная математическая формализация может быть проведена в рамках нечетко-интервального подхода. При этом применение нечетко-интервального подхода позволяет решить ряд проблем, практически неразрешимых в рамках классического теоретико-вероятностного подхода, в частности, появляется возможность непосредственного проведения арифметических операций с параметрами, заданными в нечетко-интервальной форме, что невозможно при их описании частотными распределениями. Появляется также возможность описания неопределенностей, имеющих субъективную природу, что является крайне важным при прогнозах, касающихся будущих событий.

Базовой проблемой математической формализации неопределенных параметров сложных систем и частных критериев является представление различных неопределенных характеристик в единой универсальной форме. На практике при моделировании реальных сложных систем некоторые неопределенные параметры могут быть заданы нечеткими интервалами, другие – четкими интервалами, третьи – частотными распределениями вероятностей.

Наибольшая неопределенность и, соответственно, наименьший объем полезной информации имеют место при опи-

сании неизвестных параметров систем или критериев качества четкими интервалами. Этот способ формализации соответствует ситуациям, когда достаточно точно известны лишь границы допустимых значений анализируемого параметра, и отсутствует какая-либо количественная или качественная информация о возможностях (вероятностях) реализации различных его значений внутри заданного интервала. Математически описание неопределенных величин осуществляется с помощью стандартных характеристических функций (рис. 3.6), которые для общности можно рассматривать как функции принадлежности соответствующим четким интервалам.

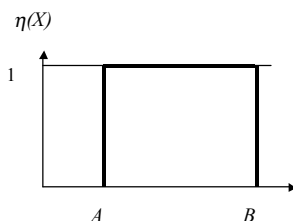


Рис. 3.6. Характеристическая функция принадлежности четкому интервалу  $[A, B]$ :  $\eta(X) = 1, X \in [A, B]$ ;  $\eta(X) = 0, X \notin [A, B]$

При наличии дополнительной качественной информации о значениях параметра внутри интервала, когда, например, на вербальном уровне известно, что значение  $a$  в некотором смысле более предпочтительно, чем  $b$ , без количественной оценки этого отношения, математическая формализация может быть адекватно реализована с помощью нечетких интервалов трапецеидального вида (рис. 3.7).

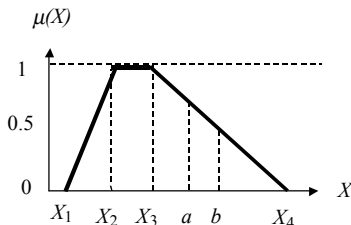


Рис. 3.7. Нечеткий интервал:  $\mu(X)$  – функция принадлежности нечеткому интервалу ( $\mu(a) > \mu(b)$ ;  $a$  предпочтительнее, чем  $b$ )

В тех случаях, когда отношения между возможностями реализации различных значений параметра можно охарактеризовать конкретными числами, нечеткие интервалы вырождаются в вероятностные распределения (рис. 3.8).

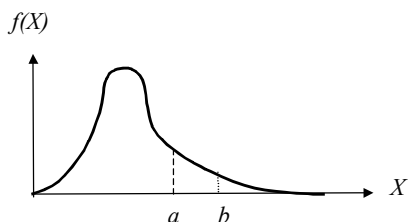


Рис. 3.8. Частотное распределение:  $f(X)$  – функция плотности вероятности

$$(f(a)/f(b) = d - \text{известное значение})$$

На основе использования этих трех базовых способов формализации – четко-интервального, нечетко-интервального и распределения вероятностей возникает проблема приведения различных описаний неопределенностей к единой форме представления. Приведение нечетко-интервальной неопределенности к форме частотных распределений невозможно, так как для этого отсутствует необходимая количественная информация.

Поэтому в качестве единого универсального способа описания неопределенностей примем нечетко-интервальный подход. Четко-интервальное описание, очевидно, является его частным случаем. Функции распределения вероятностей  $f(X)$  транспонируются в трапецидальные нечетко-интервальные функции принадлежности  $m(X)$  путем кусочно-линейной аппроксимации конкретных зависимостей  $f(X)$ .

Ясно, что при этом неизбежна потеря части существующей информации. Часть наиболее ценной информации можно сохранить, переводя частотные распределения в нечетко-интервальные числа таким образом, чтобы фиксированные доверительные интервалы частотного распределения соответствовали так называемым  $\alpha$ -уровням нечетко-интервального числа.



Схема реализации соответствующей методики представлена на рис. 3.9.

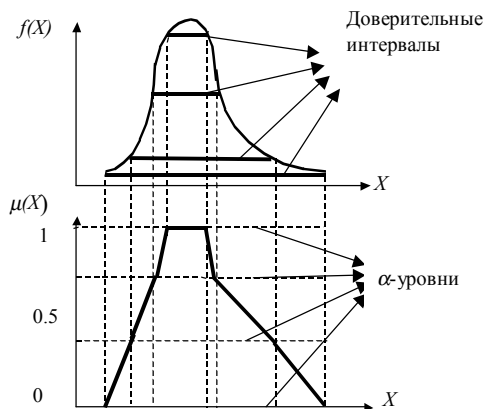


Рис. 3.9. Схема трансформации плотности вероятности  $f(X)$  – исходного частотного распределения в функцию принадлежности  $\mu(X)$  числа нечеткому интервалу

Как видно из рис. 3.9,  $\alpha$ -уровни являются, в сущности, четкими интервалами, соответствующими определенным заданным значениям функции принадлежности. Ясно, что точность такой трансформации определяется числом используемых  $\alpha$ -уровней, которое в практических задачах может выбираться исходя из геометрической сложности трансформируемого частотного распределения.

Данная методика трансформации частотных распределений в нечеткие интервалы позволяет сохранить количественную информацию о размерах и месторасположении на оси абсцисс доверительных интервалов, а также на качественном уровне сохранить информацию о частотах, которым после трансформации будут соответствовать значения функций принадлежности нечеткому интервалу на полученных в результате трансформации  $\alpha$ -уровнях.

В общем случае нечетко-интервальная математика сводится к разложению нечетких интервалов на составляющие

$\alpha$ -уровни и дальнейшем оперировании с ними в рамках интервальной математики.

В большинстве практических приложений наиболее важно иметь информацию только о двух интервалах, соответствующих  $\alpha$ -уровням:  $\mu(x) = 0$  – основание интервала и  $\mu(x) = 1$  – интервал наиболее возможных значений. Поэтому представляется целесообразным аппроксимация всех получаемых нечетких интервалов к трапецеидальной форме (рис. 3.8). Последняя весьма удобна на практике еще и тем, что однозначно описывается своими реперными точками ( $X_1, X_2, X_3, X_4$ ). Ясно, что такое четырехреперное представление значительно уменьшает количество вычислений при выполнении арифметических операций и вследствие этого снижает неопределенность итоговых результатов, являющуюся следствием самой природы интервальной арифметики, характеризующейся неизбежным ростом ширины результирующих интервалов с увеличением числа промежуточных арифметических операций с интервальными числами.

### 3.6. Основы интервальной и нечетко-интервальной математики

Понимание необходимости разработки эффективного математического аппарата для работы с неопределенностями, в том числе и субъективной природы, осознание недостатков теоретико-вероятностных методов привели к бурному развитию и формированию в последние 30 лет новых научных дисциплин: интервальной математики, теории нечетких множеств и теории возможностей, которые не отрицают, а обобщают традиционные представления (показано, что теория вероятностей является частным случаем теории возможностей, математической основой которой является теория нечетких множеств). В настоящее время становится ясным что, где, в каких ситуациях и в каких сочетаниях нужно использовать, и весь этот комплекс новых теорий и методов (включая теорию вероятностей) движется к естественному объединению в общую теорию анализа неопределенностей.

Основоположителем теории нечетких множеств в современной трактовке является Л.А. Заде, заложивший ее основы в одной из своих статей в 1965 г. Отметим, что идея построения нечетких множеств появилась в связи с исследованием известного античного парадокса кучи в трудах Е.Бореля еще в 1959 г., т.е. за 15 лет до Л.А.Заде. Однако именно благодаря Л.А.Заде теория приобрела математически формализованный вид.

До появления аппарата теории нечетких множеств любая неопределенность, появляющаяся при решении практических задач, отождествлялась со случайностью. В то же время в повседневной жизни мы часто используем такие понятия, как большой, малый, хороший, простой, сложный, горячий и т.д., которые являются нечеткими, расплывчатыми, однако эта неопределенность не носит вероятностного характера. Теория нечетких множеств разработана для оперирования с такого рода объектами. Случайность всегда связана с неопределенностью, касающейся принадлежности некоторого объекта к вполне четкому множеству. Понятие же нечеткости относится к классам, в которых имеются различные градации степени принадлежности, промежуточные между полной принадлежностью и не принадлежностью объектов к данному классу. Иными словами, нечеткое множество есть класс объектов, в котором нет резкой границы между теми объектами, которые входят в этот класс, и теми, которые в него не входят.

В настоящее время теория нечетких множеств широко применяется в решении технических проблем в системах управления автомобилем, бойлерами, химическими реакторами, холодильными агрегатами, вентиляторами и кондиционерами, печами для сжигания мусора и плавки стекла, агрегатами быстрой зарядки аккумуляторов, энергетическими системами, станками для обработки металла, нагревательными приборами, электрическими двигателями, процессами сварки, системами коммуникации, установками для очищения воды.

Расширяется использование теории нечетких множеств в экономике и управлении предприятиями. Об этом свидетельствует рост в этой области исследований числа журнальных публикаций, а также появление монографий обобщающего характера, специализированного международного жур-

нала «Fuzzy Economic Review», международной организации «International Association for Fuzzy-Set Management and Economy».

Уже опубликовано много книг по теории нечетких множеств, разработано и внедряется множество готовых программ для упрощения работы при нечетком моделировании и управлении.

Ввиду многообразия подходов к формулировке основ теории нечетких множеств и особенно математических операций с нечеткими данными представляется весьма целесообразным кратко изложить основные положения подхода, наиболее часто используемого на практике.

Пусть  $X = \{x\}$  – множество (конечное и бесконечное), которое будем называть универсальным множеством. Тогда нечеткое множество  $A$  в  $X$  есть совокупность упорядоченных пар  $A = \{x, \mu_A(x)\}$ , где  $\mu_A(x)$  – степень принадлежности  $x$  к  $A$ ;  $\mu_A(x): X \rightarrow [0, 1]$ .

Если справедливо  $\sup_{x \in X} \mu_A(x) = 1$ , то нечеткое множество называется нормальным. Функция принадлежности  $\mu_A(x)$  является обобщением понятия характеристической функции обычного множества, поскольку переходит в нее в предельном случае, когда содержит лишь две точки 0 и 1, т.е. когда множество четкое. В дальнейшем будем использовать запись  $A = \{\mu_A(x)/x\}$ , если  $X$  конечно, и  $A = \int \mu_A(x)/x$ , если  $X$  имеет мощность континуума.

Важное практическое и методологическое значение имеет вопрос об определении  $\mu_A(x)$ . Можно использовать, по сути дела, частотное определение функции принадлежности  $\mu_A(x) = m_x/n_x$ , где  $n_x$  – число опытов. При отсутствии статистики  $\mu_A(x)$  предлагается оценивать как распределение субъективной вероятности. Для аксиоматизации построения нечетких множеств используется теория полумножеств, бесконечнозначная логика Лукасевича. Предлагается также определять функцию принадлежности по множеству ее уровней. Для определения функции принадлежности предложены итерационный алгоритм согласования экспертных оценок, метод семантической дифференциации.

Следует подчеркнуть, что во всех упомянутых подходах явно или неявно полагается, что сами функции принадлежности или информация для их построения задаются экспертами на основе субъективных предпочтений, т.е., вообще говоря, не носят случайного характера.

В настоящее время нет единого мнения о том, как определять операции пересечения и объединения нечетких множеств. Обычно сначала постулируются желаемые свойства операций, а затем должно быть показано, является ли то или иное определение подходящим. Например, для операций, предложенных впервые Л. А. Заде, аксиоматизируются следующие свойства: 1) пересечение двух нечетких множества  $A$  и  $B$  есть наибольшее нечеткое множество, содержащееся и в  $A$  и в  $B$  одновременно; 2) объединение  $A$  и  $B$  есть наименьшее нечеткое множество, содержащее хотя бы одно из нечетких множеств  $A$  или  $B$ . Единственными операциями, удовлетворяющими данным аксиомам, являются:

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), (C=A \cap B), \quad (3.11)$$

$$\mu_D(x) = \sup(\mu_A(x), \mu_B(x)), (D=A \cup B). \quad (3.12)$$

Рональд Егер предложил для пересечения нечетких множеств выражение:

$$\mu_{C_p}(x) = 1 - \min [1, [(1 - \mu_A(x))^p + (1 - \mu_B(x))^p]^{1/p}], \quad (3.13)$$

для объединения:

$$\mu_{D_p}(x) = 1 - \min [1, [\mu_A(x)^p + \mu_B(x)^p]^{1/p}], p \geq 1. \quad (3.14)$$

Введенные операции при  $p \rightarrow \infty$  переходят в формулы (3.13), (3.14), при  $p=1$  получаем операции типа ограниченная разность и ограниченная сумма, которые иногда используются для задач, в которых трудно получить точное решение. Отметим, что операции (3.13), (3.14) идемпотентны лишь при  $p \rightarrow \infty$ . Рассмотренные операции носят «жесткий» характер, т.е. при

пересечении отсутствует возможность компенсации имеющих значений  $\mu_A(x)$  какими-либо значениями  $\mu_B(x)$  и наоборот. Допуская существование задач, в которых требуется компенсация, Л.А.Заде и Р.Беллман предложили более «мягкие» определения операций пересечения и объединения:

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x), \quad \mu_D(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_C(x). \quad (3.15)$$

Большинство исследователей отмечают, что как с практической, так и с математической точки зрения «жесткие» операции (3.13), (3.14) предпочтительнее «мягких» (3.15), за исключением возможных ситуаций, когда операция взятия минимума не передает требуемого смысла союза «и», обычно связываемого с пересечением. К тому же «мягкие» операции не дистрибутивны по отношению друг к другу и не обладают свойством идемпотентности. Тем не менее, на практике используют как «жесткие», так и «мягкие» операции.

В работах Р.Егера доказано, что только «жесткие» операции позволяют сохранять информацию качественного характера независимо от конкретных численных значений функций принадлежности, что является существенным доводом в пользу их использования на практике. Следует отметить, что при решении практических задач с применением элементов теории нечетких множеств в большинстве случаев используются «жесткие» операции. Тем не менее, ввиду отсутствия однозначных указаний теории необходимо обосновывать применение того или иного типа операций для каждого нового класса задач. Остальные алгебраические операции над нечеткими множествами заданы однозначно.

Дополнением нечеткого множества  $A$  в  $X$  называется нечеткое множество  $\bar{A}$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in X.$$

Разность множеств  $\bar{A}$  и  $B$  в  $X$  определяется как нечеткое множество  $A \setminus B$  с функцией принадлежности вида

$$\mu_{A \setminus B}(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), & (\mu_A(x) \geq \mu_B(x)), \\ 0, & (\mu_A(x) < \mu_B(x)). \end{cases}$$

Множеством уровня  $\alpha$  нечеткого множества  $A$  в  $X$  называется множество в обычном смысле, составленное из элементов  $x \in X$ , степени принадлежности которых нечеткому множеству  $A$  не меньше числа  $\alpha$ . Если  $A_\alpha$  множество уровня  $\alpha$  нечеткого множества  $A$ , то

$$A_\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (3.16)$$

Во многих случаях удобно пользоваться разложением нечеткого множества по его множествам уровня

$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha A_\alpha. \quad (3.17)$$

Нечеткое отношение  $R$  на прямом произведении пространств  $X \times Y = \{(x, y), x \in X, y \in Y\}$  есть расплывчатое множество в  $X \times Y$ , характеризуемое функцией принадлежности  $\mu_R$ , которая сопоставляет каждой упорядоченной паре  $(x, y)$  ее степень принадлежности к  $R$ .

В общем случае  $n$ -е нечеткое множество на декартовом произведении  $X = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  есть множество в  $X$  с функцией принадлежности  $\mu_R(x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Нечеткие множества, порождаемые отображениями, определяются следующим образом. Пусть  $f: X \rightarrow Y$  – отображение из  $X$  в  $Y$ , причем образ элемента  $x$  обозначается через  $y = f(x)$ , и пусть  $A$  – нечеткое множество в  $X$ . Тогда отображение  $f$  порождает нечеткое множество  $B$  в  $Y$  с функцией принадлежности, задаваемой соотношением

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x). \quad (3.18)$$

Расплывчатое множество  $B(x)$  в пространстве  $Y = \{y\}$  называется условным по  $x$ , если его функция принадлежности зависит от  $x$  как от параметра, что выражается записью  $\mu_B(y/x)$ .

Пусть каждому  $x \in X$  соответствует расплывчатое множество  $B(x)$  в  $Y$  с функцией принадлежности  $\mu_B(y/x)$ . Тогда любое расплывчатое множество  $A$  в  $X$  порождает расплывчатое множество  $B$  в  $Y$ , определяемое соотношением

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in X} \min[\mu_A(x), \mu_B(y/x)]. \quad (3.19)$$

Для упрощения записи операции *sup* и *min* обычно обозначают, как  $\vee$  и  $\wedge$  соответственно. Тогда последнее выражение примет вид

$$\mu_B(y) = \vee_x [\mu_A(x) \wedge \mu_B(y/x)] \quad (3.20)$$

Отметим, что соотношение (3.20) аналогично, но не эквивалентно маргинальному распределению вероятностей. Выражение (3.18) является одной из формулировок принципа обобщения, играющего важную роль в теории нечетких множеств. В задачах принятия решений чаще используют другую его интерпретацию. Пусть имеется отображение  $f: X \rightarrow Y$  и  $A = \int_x \mu(x) / x$  – нечеткое множество на  $X$ . Тогда справедливо:

$$f(A) = \int_x \mu(x) / f(x).$$

Принцип обобщения позволяет расширить область определения отображения  $f$  на нечеткие подмножества универсального множества.

В зависимости от информированности и опыта лиц, принимающих решения (ЛПР), представления, которыми они пользуются при построении нечетких множеств, могут обладать различной степенью расплывчатости, в результате чего возникает вопрос о градациях нечеткости самих нечетких множеств. Формализация меры нечеткости имеет важное практическое и теоретическое значение.

Сформулируем общие требования к мерам нечеткости.

Пусть  $A$  – нечеткое множество на  $X$  и  $d(A)$  – мера нечеткости  $A$ . Тогда должны выполняться следующие требования:

- 1)  $d(A) = 0$ , если  $A$  четкое множество;



2)  $d(A)$  достигает максимума при  $\mu_A(x) = \frac{1}{2}$  для всех  $x \in X$ ;

$$3) d(A) \geq d(A^*), \text{ если } \begin{cases} \mu_{A^*}(x) \geq \mu_A(x), \mu_A(x) > \frac{1}{2}, \\ \mu_{A^*}(x) \leq \mu_A(x), \mu_A(x) < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Можно показать, что этим требованиям удовлетворяет мера, аналогичная мере количества энтропии Шеннона, если вместо вероятностей в ней использовать функции принадлежности.

Свойствам 1 ÷ 3 удовлетворяет довольно широкий класс функций. Анализируя недостатки такого рода конструктивных подходов к построению мер нечеткости, Р. Егер ввел определение, вытекающее из формулировок операций над нечеткими множествами. Он исходил из того, что единственным отличием алгебры нечетких множеств от обычной булевой алгебры является непустота пересечения  $A \cap \bar{A}$ , т. е. для нечетких множеств

$$A \cap \bar{A} = A \cap (I - A) = B, \quad (3.21)$$

где  $B$  – непустое множество.

Очевидно, что чем ближе  $A$  к  $\bar{A}$ , тем больше  $B$ , и тем сильнее  $A$  и  $\bar{A}$  отличаются от четкого множества. На основании этого Р. Егер представил меру четкости нечеткого множества  $A$  как

$$D_p(A, \bar{A}) = \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n |\mu_A(x_i) - \mu_{\bar{A}}(x_i)|^p \right]^{1/p}, \quad (3.22)$$

где  $p = 1, 2, \dots, \infty$  — степень нечеткости.

Отсюда выводится мера нечеткости

$$d_p(A, \bar{A}) = 1 - D_p(A, \bar{A}) / n^{1/p}. \quad (3.23)$$

Определение (3.23) удовлетворяет требованиям 1÷3.

Для изменения степени нечеткости введены специальные операции. Степенью нечеткого множества  $A$  называется множество  $A^\varepsilon = \{\mu_A^\varepsilon(x_i)/x_i\}$ , где  $\varepsilon$  – некоторое число. При  $\varepsilon = 2$  получаем частный случай операции возведения в степень — так называемую операцию концентрации  $CON(A) = A^2$ , а при  $\varepsilon = 0.5$  – операцию растяжения  $DIL(A) = A^{1/2}$ . Поскольку степень принадлежности – величина положительная, не превосходящая единицу, операция  $CON$  снижает степень нечеткости описания, в то время как  $DIL$  повышает.

Рассмотрение операции модифицирования нечеткости играет важную роль при формировании свертки частных критериев качества. Зачастую функции принадлежности нечетких множеств являются нечеткими множествами. Такая ситуация типична при их задании на лингвистическом уровне. Нечеткие множества с нечеткими функциями принадлежности называют нечеткими множествами типа 2.

Пусть  $A$  – нечеткое множество типа 2 на  $X$ , тогда для каждого  $x \in X$  функция принадлежности  $\mu_A(x)$  является нечетким множеством в  $Y$  с функцией принадлежности  $f_x(y)$ , т.е.

$$\mu_A(x) = \int f_x(y) / y, \quad (3.24)$$

или для дискретного случая

$$\mu_A(x) = \left\{ \frac{f_x(y_i)}{y_i} \right\}, \quad i=1, \dots, n. \quad (3.25)$$

Пользуясь принципом обобщения Л.А.Заде, можно построить нечеткие множества 3, 4, ...,  $N$  и т.д. типов. В случаях, когда одновременно присутствуют оба вида неопределенности (нечеткость и случайность), теория нечетких множеств хорошо сочетается с элементами теории вероятностей и математической статистики.

Рассмотрим важное для практики понятие математического ожидания функции при наличии обоих типов неопределенности.

Пусть  $A$  – нечеткое подмножество множества  $X = \{x_i\}$ ,  $i=1, \dots, n$ , со степенью принадлежности  $\mu_A(x)$  и пусть  $P_i$  – ве-

роятность события  $x_i$ . Тогда математическое ожидание функции  $f: X \rightarrow Y$  по  $x$  определяется выражением

$$C_p(f, A) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \mu_A(x_i) P_i. \quad (3.26)$$

Отсюда видно, что теория нечетких множеств отнюдь не отвергает традиционные подходы, основанные на теоретико-вероятностной интерпретации неопределенностей, а только позволяет более детально описать существующие неопределенности в исходных данных, причем при необходимости в сочетании с методами традиционной статистики.

В настоящее время выделяют четыре типа вероятностей: классическая, частотная, логическая и субъективная, причем каждая из них удовлетворяет исходным аксиомам теории вероятностей А.Н.Колмогорова.

Однако даже в повседневной практике встречаются случаи, когда ни одна из этих интерпретаций вероятности не обеспечивает адекватного описания прогноза возможности того или иного события.

Рассмотрим пример, в котором анализируется ситуация ожидания автобуса группой людей.

Автобус прибывает полный, и количество пассажиров, которые могут в него попасть, зависит от воли водителя. На этом примере отчетливо проявляется различие возможности (степени легкости) того, что в автобус войдут 1, 2, 3, ..., и т.д. пассажиров и вероятностью того, что водитель их возьмет. Основания формализованной теории возможностей заложены Л.А.Заде. Он подчеркивает, что в отличие от вероятности возможность предлагается рассматривать как степень легкости, с которой рассматриваемая переменная может принимать определенные значения. В качестве основы теории возможностей использован математический аппарат теории нечетких множеств, аналогично тому, как основой теории вероятности является теория меры.

Распределение возможностей определено следующим образом: пусть  $X$  – переменная, принимающая значения из множества  $U = \{u_1, u_2, \dots\}$ . Тогда распределение возможности  $X$  принимает значения из  $U$  и описывается функцией

$\pi_x : U \rightarrow [0,1]$ , где  $\pi_x(X) = Poss : [X = u]$ . Обозначение  $Poss$  используется для отражения конкретного значения возможности при фиксированном  $u \in U$ .

В рассмотренном выше примере ожидания автобуса  $X$  – количество пассажиров, которые имеют возможность войти в автобус;  $u$  – элементы множества  $U = \{1,2,3\dots\}$ . Тогда  $\pi_x(2)$  – возможность, что в автобус войдут 2 человека,  $\pi_x(3)$  – 3 человека и т.д.

Пусть  $A$  – подмножество в  $U$ , тогда  $\pi_A(A) = Poss[u \in A]$

В теории возможностей постулируется, что

$$\pi_A(A) = \sup_{X \in A} [\pi_X(X)] \quad (3.27)$$

Если  $\mathfrak{A}$  — нечеткое подмножество в  $U$ , то

$$\pi_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{A}) = \sup_{X \in \mathfrak{A}} [\pi_X(X) \wedge \mu_{\mathfrak{A}}(X)] \quad (3.28)$$

где  $\mu_{\mathfrak{A}}(X)$  – функция принадлежности подмножества  $\mathfrak{A}$ .

Доказано, что в случаях наличия лишь косвенной информации о распределении возможностей  $\pi_X(X)$ , то есть когда можно указать лишь, что  $\pi_X(X)$  более возможно, чем  $\pi_X(X)$  без количественной оценки этого отношения (linear ordering), выражения (3.27), (3.28) являются единственно допустимыми. В тех случаях, когда отношения между возможностями можно охарактеризовать конкретными числами (cardinal ordering), распределение возможностей вырождается в вероятностное распределение. Тогда  $\pi_X(X)$  с следует оперировать как с обычной плотностью вероятности. Отсюда можно сделать вывод, что теорию возможностей можно рассматривать как обобщение теории вероятностей.

Появление формализованной теории возможностей породило массу вопросов методологического плана, в частности проблему единой трактовки самой категории возможности. Основатель теории возможностей Л.А.Заде тесно связы-

вал ее с лингвистической интерпретацией нечетких множеств. Идея описания истинности лингвистических переменных, сформулированных на естественном языке с помощью неоднозначной логики, была высказана еще Л. Виттгенштейном. Однако строгие методы оперирования с переменными лингвистической природы появилась лишь с развитием теории нечетких множеств. Лингвистическая интерпретация играет большую роль в теории нечетких множеств и теории возможностей, позволяя оперировать с объектами качественной природы, в том числе с высказываниями на естественном языке.

Главным достоинством теории возможностей является наличие формализованного математического аппарата, позволяющего работать в условиях неопределенности при отсутствии информации, достаточной для применения теоретико-вероятностных методов.

Проведенный анализ позволяет сделать вывод о том, что теория нечетких множеств находится на стадии интенсивного развития, не является концептуально замкнутой, допускает неоднозначность ряда математических операций внутри себя. Все это порождает неудовлетворенность исследователей и появление целого ряда альтернативных вариантов теории, свободных от тех или иных недостатков аксиоматизации, предложенной Л.А. Заде.

В ряде случаев предложенные варианты выглядят весьма перспективными, расширяющими концепцию нечеткости и требуют более детального изучения и испытаний на практике. В других случаях новые теории нечетких множеств имеют лишь академический интерес, будучи практически бессодержательными.

Подводя итог, следует подчеркнуть, что в теории принятия решений, многокритериальной оптимизации, автоматическом управлении и в подавляющем большинстве прочих отраслей в настоящее время используется вариант теории нечетких множеств, предложенный Л.А. Заде, хорошо зарекомендовавший себя на практике.

## Методы интервальной математики

Параллельно и в значительной степени независимо от теории нечетких множеств в последние 35 лет интенсивно развивалась интервальная математика. Строго говоря, четкий (crisp) интервал можно рассматривать как частный случай нечеткого интервала. Нечетко-интервальная и обычная интервальная математика тесно связаны, более того, интервальная арифметика может рассматриваться как базис нечетко-интервальной математики.

Основным практическим преимуществом аппарата интервальной и нечетко-интервальной математики является возможность осуществления прямых арифметических операций с четко-нечеткими интервальными числами, в то время как многочисленные попытки определить такие операции для параметров, заданных своими частотными распределениями, не привели к успешным результатам.

Нечетко-интервальную математику можно в определенной степени рассматривать как обобщение математики обычных интервалов. И в то же время на практике ряд параметров может быть задан на интервальном и нечетко-интервальном уровне, а часть – на уровне частотных распределений. В этой связи возникает проблема разумного трансформирования частотных распределений в соответствующие им нечеткие интервалы.

В общем случае нечетко-интервальная математика сводится к разложению нечетких интервалов на составляющие  $\alpha$ -уровни и дальнейшем оперировании с ними в рамках интервальной математики. Как видно из рис. 3.10,  $\alpha$ -уровни являются, в сущности, четкими интервалами, соответствующими определенным заданным значениям функции принадлежности.

В настоящее время существуют несколько основных подходов к построению интервальной арифметики и множество их модификаций. Последнее связано со специфическими свойствами операций с интервалами, выявленными в процессе исследования. В частности, не выполняется свойство дистрибутивности, т.е. если  $A, B, C$  – интервалы, то выполняется лишь:

$$A(B + C) \subset AB + AC. \quad (3.29)$$

Свойство (3.29) называется субдистрибутивностью.

Кроме того, вычитание не обратное сложению, деление не обратное умножению, т.е. если  $A$  – интервал, то:

$$A - A \neq 0, \quad \frac{A}{A} \neq 1. \quad (3.30)$$

Главным и наиболее неприятным на практике свойством интервальной арифметики является сравнительно быстрый рост ширины интервала результата по мере возрастания числа арифметических операций.

Именно это послужило причиной появления различных модификаций метода, целью которых являлась в основном попытка препятствовать этому явлению. Наиболее известными из них являются: интервальная арифметика с нестандартным вычитанием и делением, обобщенная интервальная арифметика, сегментная математика, центрированная форма, MV-форма. Все эти подходы оказываются эффективными применительно к определенным классам ситуаций. В целом рост результирующих интервалов в полной мере отражает реальность и, в сущности, соответствует принципу возрастания неопределенности (энтропии).

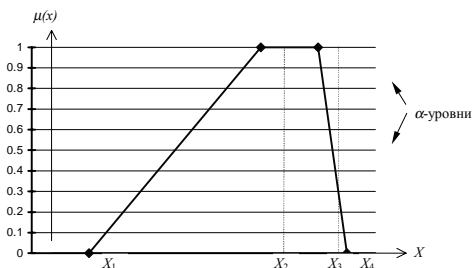


Рис. 3.10. Разложение нечетких интервалов на составляющие  $\alpha$ -уровни

Наиболее распространенным, так называемым «наивным», является подход к построению интервальной арифметики по следующим правилам выполнения операций:

Пусть  $A = [A_1, A_2]$  и  $B = [B_1, B_2]$  – интервалы, тогда:

### 1) Сложение

$$A + B = [A_1 + B_1, A_2 + B_2]. \quad (3.31)$$

### 2) Вычитание

$$A - B = [A_1 - B_2, A_2 - B_1]. \quad (3.32)$$

### 3) Умножение

$$A \cdot B = [\min\{A_1 \cdot B_1, A_2 \cdot B_2, A_1 \cdot B_2, A_2 \cdot B_1\}, \max\{A_1 \cdot B_1, A_2 \cdot B_2, A_1 \cdot B_2, A_2 \cdot B_1\}] \quad (3.33)$$

### 4) Деление

$$\frac{A}{B} = [A_1, A_2] \cdot \left[ \frac{1}{B_2}, \frac{1}{B_1} \right]. \quad (3.34)$$

Как уже указывалось, в общем случае выполнение операций над нечетко-интервальными числами сводится к выполнению операций над четкими интервалами, представленными в виде  $\alpha$ -уровней. Рассмотрим этот механизм на примере сложения. Пусть существуют нечеткие интервалы  $A$  и  $B$ , тогда нечеткий интервал  $C$ , равный сумме исходных интервалов можно найти по формуле:

$$C = A + B = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (A_{\alpha} + B_{\alpha}), \quad (3.35)$$

где  $C_{\alpha}, A_{\alpha}, B_{\alpha}$  –  $\alpha$ -уровни нечетких интервалов  $C, A$  и  $B$  соответственно, т.е. четкие интервалы с одинаковыми значениями функции принадлежности нечеткому интервалу;  $\bigcup_{\alpha}$  – знак объединения по  $\alpha$ -уровням.

Операции вычитания, деления и умножения над нечеткими интервалами выполняются аналогично.



### 3.7. Применение нечетко-интервального анализа для расчета параметров инвестиций

Методику нечетко-интервального расчета финансовых параметров рассмотрим на основе конкретного примера расчета  $NPV$  для инвестиционного проекта, в котором фаза строительства продолжается два года с инвестициями  $KV_0$  и  $KV_1$  для каждого года соответственно. Получение прибыли от проекта начинается сразу же по окончании строительства и заканчивается через два года ( $P_2$  и  $P_3$ ). Ставка ссудного процента  $d$  остается постоянной в течение всего инвестиционного цикла.

Положим, что инвестиции, прибыль и ставка ссудного процента являются неопределенными параметрами, заданными нечеткими интервалами. При этом будем использовать трапецидальную форму нечеткого интервала.

Как показано в разделе 3.6, это позволяет однозначно определить каждый из них четырьмя реперными точками. В нашем примере соответствующие исходные нечеткие интервалы через свои реперные точки задавались следующим образом:

$$\begin{aligned}KV_0 &= \{2, 2.8, 3.5, 4\}; P_0 = \{0, 0, 0, 0\}; \\KV_1 &= \{0, 0.88, 1.50, 2\}; P_1 = \{0, 0, 0, 0\}; \\KV_2 &= \{0, 0, 0, 0\}; P_2 = \{6.5, 7.5, 8.0, 8.5\}; \\KV_3 &= \{0, 0, 0, 0\}; P_3 = \{5.5, 6.5, 7.0, 7.5\},\end{aligned}$$

ставка ссудного процента задавалась одним и тем же для всех лет проекта нечетким интервалом  $d = \{0.08, 0.13, 0.22, 0.35\}$ .

Как видно из рис. 3.11, результатом расчета на основе нечетко-интервального расширения выражения (3.1) в рассматриваемом случае является также нечеткий интервал.

Из рисунка видно, что максимальная ширина итогового интервала (ширина основания трапеции) существенно выше ширины любого из интервалов, представляющих исходные данные.

В этой связи возникает вопрос о том, насколько использование нечетко интервальной математики увеличивает неопределенность результатов по сравнению с традиционными методами учета неопределенностей, в частности, с методом статистических испытаний.

При реализации метода статистических испытаний значения недетерминированных входных параметров выбираются случайно, в соответствии с известной процедурой типа Монте-Карло (при помощи генератора случайных чисел).

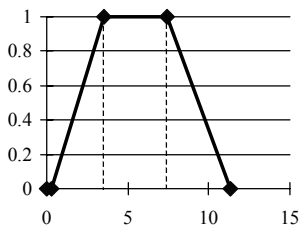


Рис. 3.11. Итоговый нечеткий интервал NPV

Для примера рассмотрим некий инвестиционный проект, рассчитанный на пять лет. Пусть в четырехреперном виде входные нечетко-интервальные значения для него выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= (\{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{3, 5, 5, 7\}, \{10, 13, 13, 16\}); \\ V &= (\{1, 3, 3, 5\}, \{0, 2, 2, 4\}, \{-1, 0, 0, 1\}, \{0, 0, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0\}); \\ d &= \{0.1, 0.15, 0.15, 0.2\}. \end{aligned}$$

Здесь  $P$  – вектор нечетких интервалов, характеризующий доходы в каждом из пяти лет проекта,  $V$  – расходы,  $d$  – нечетко-интервальное значение дисконта.

Используя разработанную методику нечетко-интервального расчета  $NPV$ , получаем:

$$NPV = \{-2.904168, 5.981243, 5.981243, 16.013865\}.$$

Необходимо обратить внимание на то, что все исходные нечеткие интервалы принимались в виде равнобедренных треугольников для того, чтобы значение верхней точки соответствовало математическому ожиданию, а границы основания каждого треугольника – диапазону возможных значений, т.е. для нормального распределения шести среднеквадратич-

ных отклонений  $\delta$ , что соответствует доверительному интервалу, в который все точки распределения попадают с вероятностью 99,73%. Для метода Монте-Карло необходимо использовать именно этот вид распределения, так как какую-либо оценку результатов можно проводить только для нормально-го или равномерного распределения. Следует подчеркнуть, что понятия математического ожидания и дисперсии имеют физический смысл только в этих случаях, при ненормальности (или существенной несимметричности) распределений эти характеристики представляют собой не более чем математические абстракции. Отмеченное обстоятельство является одним из крупнейших недостатков статистического метода, тогда как предлагаемая нечетко-интервальная методика не накладывает такого рода ограничений на входные параметры.

Для проведения адекватного сравнения методик для каждого выбранного входного нечеткого интервала определялось соответствующее ему нормальное распределение. При этом значение верхней точки нечеткого интервала соответствовало математическому ожиданию, а основание нечеткого интервала – доверительному интервалу  $6\delta$ .

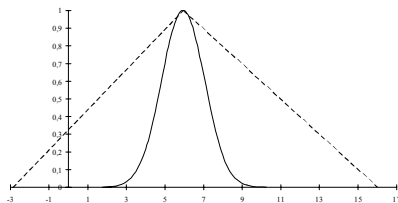
Далее с использованием генератора случайных чисел проводилась серия из 1000 независимых испытаний, для каждого из которых рассчитывались итоговые четкие значения  $NPV$ . В результате получено частотное распределение значений  $NPV$  со следующими характеристиками: математическое ожидание 5,94,  $6\delta$  равно 6,68.

На рис. 3.12 изображены нечеткий интервал  $NPV$  и полученное частотное распределение, отнормированное на единицу. Из рисунка видно, что полученный итоговый нечеткий интервал существенно шире частотного распределения. Последнее объясняется, во-первых, неизбежным ростом ширины результирующих интервалов в силу отмеченных в разделе 1 внутренних свойств интервальной арифметики, во-вторых, тем обстоятельством, что реализация граничных (достаточно малых или больших) значений в методе статистических испытаний попросту маловероятна.

Сравним достоинства и недостатки обоих методов.

Метод Монте-Карло требует значительно больших затрат

машинного времени, однако с учетом существующей мощности ЭВМ и самой специфики задачи, не требующей отслеживания  $NPV$  в реальном масштабе времени, этот недостаток можно считать несущественным.



*Рис. 3.12. Итоговые нечеткий интервал  $NPV$  (пунктирная линия) и частотное распределение (сплошная линия)*

Далее, необходимо обратить внимание на требования, которые каждый из методов предъявляет к входным параметрам. Метод Монте-Карло требует построения канонических частотных распределений для входных параметров. В случае инвестиционного прогнозирования подобное требование, как правило, невыполнимо, так как всевозможные экспертные прогнозы будущих доходов, затрат и дисконта по своей природе являются не только не вероятностными, но и субъективными. Иначе говоря, эксперту значительно проще работать с нечеткими интервалами, чем с нормальными распределениями. Кроме того, само требование нормальности входных распределений, которое продиктовано невозможностью, по упомянутым выше причинам, адекватной оценки получаемых результатов для ненормального распределения, является недопустимо жестким, поскольку зачастую неопределенные значения параметров, относящиеся к будущему, не являются нормально распределенными. С другой стороны, предлагаемая нечетко-интервальная методика соответствует интуитивным представлениям экспертов о прогнозируемых параметрах и не только не ограничивает их в работе, но и предоставляет собой, как показывает практика, весьма удобный инструмент для формализации исходных данных.

В рассмотренном модельном примере с использованием метода Монте-Карло было получено некоторое итоговое нор-

мальное распределение. Для случая нормального распределения  $NPV$  существуют методики, позволяющие в определенной мере оценивать финансовый риск. Однако в случае ненормальности распределения, когда математическое ожидание не имеет содержательного смысла, эти подходы неприменимы. С другой стороны, для нечетко-интервального варианта расчета разработана представленная ниже методика, позволяющая представить лицу, принимающему решения, во-первых, значение риска в денежном выражении и, во-вторых, позволяющая поставить и решить задачу оптимизации потоков платежей. В результате решения этой задачи отыскиваются четкие, неинтервальные оптимальные значения потоков платежей и  $NPV$ , причем все эти значения учитывают как неопределенность экспертами при прогнозе денежных потоков, так и неопределенность внешней по отношению к задаче ставки дисконта, и представляют собой своего рода компромисс между стремлением к максимизации прибыли с одной стороны и уменьшением существующих неопределенностей с другой.

Существенным недостатком предлагаемой методики может считаться тот факт, что соотношение между доверительными интервалами итогового нормального распределения и соответствующими им  $\alpha$ -уровнями итогового нечеткого интервала  $NPV$  существенно выше, чем это соотношение для входных значений. Однако решение задачи оптимизации потоков платежей приводит к уменьшению указанного соотношения до значений, соответствующих входным значениям.

Получаемые с помощью разработанной методики нечеткие интервалы  $NPV$  позволяют дать оценку прогнозируемого чистого приведенного дохода, его наиболее возможных значений, а также количественно оценить степень риска инвестиций.

Количественные оценки финансового риска инвестиций в разработанной методике основываются на определении меры (степени) четкости нечетких интервалов, подробно описанной в разделе 3.6. Применительно к рассматриваемой задаче меру четкости получаемого нечеткого интервала  $NPV$  можно лингвистически интерпретировать как степень риска или степень неуверенности прогноза получения чистого приведенного дохода в интервале  $[NPV_p, NPV_d]$ .

$$dd = 1 - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |2\mu_{NPV} (NPV_i) - 1|, \quad (3.36)$$

где  $m$  – число точек разбиения опорного интервала  $[NPV_p, NPV_d]$ .

При этом, чем четче, «прямоугольнее» интервал, тем выше степень неопределенности, а значит, и риск. На первый взгляд это утверждение кажется парадоксальным, однако любой четкий интервал, не содержащий какой-либо дополнительной информации об относительной предпочтительности лежащих внутри него значений, содержит меньше полезной информации, чем построенный на его основе нечеткий интервал. В последнем случае дополнительная информация, снижающая неопределенность, обусловлена наличием функции принадлежности интервалу.

В итоге предлагаемый подход к оценке чистого приведенного дохода естественным образом порождает два критерия оценки: собственно нечеткий интервал  $NPV$  и степень неуверенности его прогноза (степень риска)  $dd$ .

С формальной точки зрения задача нечетко-интервального расчета внутренней нормы окупаемости  $IRR$  представляется как нечетко-интервальное решение уравнения (3.2) относительно  $d$ . Доказано, что решение уравнений с нечеткими параметрами возможно лишь при использовании разложения этих параметров ( $P_t$  и  $KV_t$ ) по  $\alpha$ -уровням. Последнее сводит постановку задачи отыскания  $IRR$  к системе нелинейных четко-интервальных уравнений вида:

$$\sum_{t=1}^T \frac{[P_t]_{\alpha}}{(1+[d]_{\alpha})^t} - \sum_{t=0}^{t_c} \frac{[KV_t]_{\alpha}}{(1+[d]_{\alpha})^t} = [0,0], \quad (3.37)$$

где  $[P_t]_{\alpha}$  и  $[KV_t]_{\alpha}$  – четкие интервалы, соответствующие  $\alpha$ -уровням.

Исследования показали, что естественное предположение о том, что в правой части (3.37) должен находиться вырожденный нулевой интервал  $[0,0]$ , не обеспечивает получение адекватных результатов.

Для иллюстрации рассмотрим упрощенный пример двух-летнего проекта, согласно которому все инвестиции заканчиваются в первом году, а производство продукции и получение

ние доходов начинается и заканчивается во втором году. Тогда каждое из уравнений для  $a$ -уровней (3.37) разобьется на два:

$$\frac{P_{11}}{(1+d_2)} - KV_{02} = 0 \text{ — левая граница интервала } NPV, \quad (3.38)$$

$$\frac{P_{12}}{(1+d_1)} - KV_{01} = 0 \text{ — правая граница интервала } NPV,$$

где  $\{P_{11}, P_{12}\}$ ,  $\{KV_{01}, KV_{02}\}$  и  $\{d_1, d_2\}$  — границы четких интервалов прибыли, инвестиций и дисконта на произвольном  $a$ -уровне.

Формальное решение (3.38) относительно границ интер-

вала  $d_1$  и  $d_2$  тривиально:  $d_1 = \frac{P_{12}}{KV_{01}} - 1$ ;  $d_2 = \frac{P_{11}}{KV_{02}} - 1$ , однако бессмысленно, поскольку правая граница интервала  $[d_1, d_2]$  всегда оказывается меньше левой. В то же время полученный результат легко объясняется с общих методических позиций. Правила интервальной математики построены так, что любые арифметические действия с интервалами в результате приводят только к интервалам. Последнее находится в полном соответствии с известными общеметодическими положениями, согласно которым действия с неопределенностями приводят к росту неопределенности, то есть к росту энтропии системы. Поэтому в нашем случае наличие в правой части (3.37) вырожденного нулевого интервала эквивалентно требованию снижения неопределенности левой части до нуля. Это оказалось возможным лишь при инверсном характере интервала  $[d_1, d_2]$ , что можно интерпретировать как требование внесения в систему отрицательной энтропии.

Таким образом, требование вырожденного нулевого интервала при решении интервальных уравнений является некорректным. Более конструктивная постановка задачи была построена с помощью следующих рассуждений. Анализируя выражения (3.38), можно заметить, что для любого значения  $d_1$  минимальная ширина интервала  $NPV$  достигается при  $d_2 = d_1$ . Последнее также находится в соответствии с общеметодическими положениями: минимальная неопределен-

ность результата ( $NPV$ ) достигается при минимальной неопределенности варьируемого параметра системы.

Для иллюстрации приведенных выше общих рассуждений рассмотрим пример двухлетнего проекта, согласно которому в первом году осуществляются только инвестиции (в интервальной форме  $KV_0 = [1, 2]$ ) и нет доходов, во втором году получается весь доход ( $P_1 = [2, 3]$ ) и отсутствуют какие-либо инвестиции. В этом случае связь интервала  $[NPV_p, NPV_2]$  и дисконта представляется следующим образом:

$$\frac{[2,3]}{1+d} - [1,2] = [NPV_1, NPV_2] \quad (3.39)$$

На рис. 3.13 представлены результаты расчетов интервалов  $[NPV_p, NPV_2]$  для различных значений  $d$ , полученные на основе выражения (3.39). Из рисунка видно, что наиболее разумной постановкой задачи поиска  $IRR$  является требование, чтобы середина интервала  $NPV$  находилась в нулевой точке (требование симметричности интервала относительно нуля).

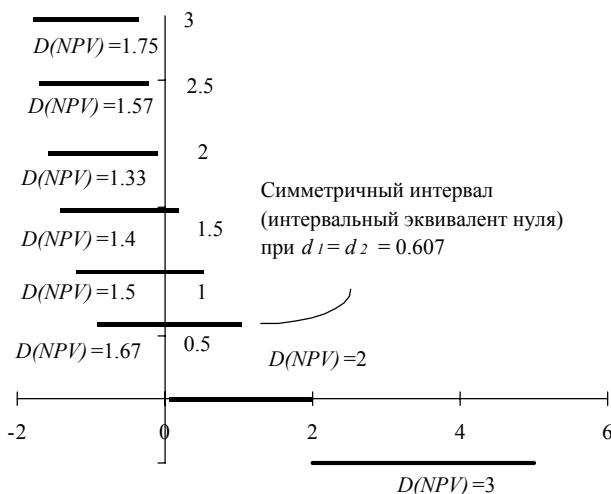


Рис. 3.13. Зависимость ширины интервала  $NPV$  от значения дисконта.  $D(NPV)$  – ширина интервала  $NPV$



Очевидное, на первый взгляд, требование минимизации получаемого интервала  $NPV$  приводит к получению минимальных по размеру положительных либо отрицательных интервалов  $NPV$ , не пересекающих, однако, нулевую точку, что не соответствует естественным представлениям об интервале в окрестности нуля.

Кроме того, легко доказывается, что только требование симметричности интервала относительно нуля асимптотически устойчиво при сужении границ всех интервалов к их центрам, то есть обеспечивает верный результат и для вырожденного случая.

Таким образом, в общем случае задача сводится к отысканию таких точных (неинтервальных) значений  $d$ , которые бы обеспечивали на каждом  $\alpha$ -уровне в уравнениях (3.37) симметричность получаемых интервалов  $NPV$  относительно нуля, т.е. гарантировали бы выполнение требования  $(NPV_1 + NPV_2) = 0$  для каждого  $\alpha$ -уровня ( $\alpha = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1$ ).

Соответствующая задача решается на каждом  $\alpha$ -уровне численно методом минимизации Ньютона.

Дальнейший анализ проведем на основе результатов решения модельной задачи. Сравним два инвестиционных проекта, рассчитанных на 4 года.

Нечетко-интервальные чистые потоки платежей  $K_i = P_i - KV_i$  в каждом году будем описывать при помощи четырехреперного представления нечетких интервалов.

Исходные данные для рассматриваемых проектов и результаты расчетов  $IRR$  для  $\alpha$ -уровней представлены на рис. 3.14.

При этом значение  $K_{ij}$  соответствует  $i$ -й реперной точке трапецидального нечеткого числа, соответствующего чистому потоку платежей в  $j$ -м году.

Необходимо обратить внимание на то, что данные для первого проекта носят явно более определенный характер (основания нечетких интервалов для первого проекта уже, чем для второго).

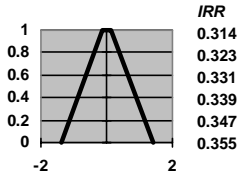
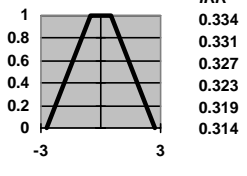
0	1	2	3	NPV							
$K_{01}=6.95$ $K_{02}=6.95$ $K_{03}=7.05$ $K_{04}=8.00$	$K_{11}=4.95$ $K_{12}=4.95$ $K_{13}=5.05$ $K_{14}=6.00$	$K_{21}=3.95$ $K_{22}=3.95$ $K_{23}=4.05$ $K_{24}=5.00$	$K_{31}=1.95$ $K_{32}=1.95$ $K_{33}=2.05$ $K_{34}=3.00$	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>IRR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.314</td></tr> <tr><td>0.323</td></tr> <tr><td>0.331</td></tr> <tr><td>0.339</td></tr> <tr><td>0.347</td></tr> <tr><td>0.355</td></tr> </tbody> </table>	IRR	0.314	0.323	0.331	0.339	0.347	0.355
IRR											
0.314											
0.323											
0.331											
0.339											
0.347											
0.355											
$K_{01}=6.00$ $K_{02}=6.95$ $K_{03}=7.50$ $K_{04}=8.00$	$K_{11}=4.00$ $K_{12}=4.95$ $K_{13}=5.50$ $K_{14}=6.00$	$K_{21}=3.00$ $K_{22}=3.95$ $K_{23}=4.50$ $K_{24}=5.00$	$K_{31}=1.00$ $K_{32}=1.95$ $K_{33}=2.50$ $K_{34}=3.00$	 <table border="1"> <thead> <tr> <th>IRR</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.334</td></tr> <tr><td>0.331</td></tr> <tr><td>0.327</td></tr> <tr><td>0.323</td></tr> <tr><td>0.319</td></tr> <tr><td>0.314</td></tr> </tbody> </table>	IRR	0.334	0.331	0.327	0.323	0.319	0.314
IRR											
0.334											
0.331											
0.327											
0.323											
0.319											
0.314											

Рис.3.14. Модельный пример сравнения двух инвестиционных проектов

Как видно из рис. 3.14, получаемые в результате расчетов для каждого  $\alpha$ -уровня значения  $IRR_{\alpha}$  могут как возрастать, так и снижаться с ростом  $\alpha$ -уровня, и в итоге для каждого проекта получается собственная область возможных значений  $IRR$ . В связи с этим возникает проблема интерпретации получаемых результатов.

Поскольку рассчитываемые на каждом  $\alpha$ -уровне значения  $IRR_{\alpha}$  являются неинтервальными решениями интервальной задачи, получаемые множества значений  $IRR_{\alpha}$  затруднительно сколько-нибудь обоснованно интерпретировать в интервальном или нечетко-интервальном смысле. Поэтому необходимо получить определенные четкие неинтервальные оценки  $IRR$ . Простейшая оценка – среднее значение  $IRR_{cp}$  – безусловно, применима, однако она не учитывает, что с ростом  $\alpha$ -уровня растет надежность результата, т.е.  $IRR_{\alpha}$ , полученные на высоких  $\alpha$ -уровнях, более ожидаемы и возможны, чем полученные на низких  $\alpha$ -уровнях, уже в силу определения этих уровней. С другой стороны, каждому  $IRR_{\alpha}$  соответствует четкий интервал  $[NPV_1, NPV_2]_{\alpha}$ , величина которого является

характеристикой неопределенности получаемого неинтервального значения  $IRR_\alpha$ , поскольку размеры интервалов  $[NPV_{2i}, NPV_{1i}]_\alpha$  количественно характеризуют отличия левых частей интервальных уравнений (3.38) от вырожденного интервального нуля  $[0,0]$ . Все это позволяет естественным образом ввести две взвешенные оценки  $IRR$  на множестве  $IRR_\alpha$ : наименее ожидаемую (наименее надежную)  $IRR_{min}$  и наиболее ожидаемую (наиболее надежную)  $IRR_{max}$ :

$$IRR_{min} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} IRR_i (NPV_{2i} - NPV_{1i})}{\sum_{i=0}^{n-1} (NPV_{2i} - NPV_{1i})}, \quad (3.40)$$

где  $n$  — число  $\alpha$ -уровней.

$$IRR_{max} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} IRR_i \alpha_i}{\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i}. \quad (3.41)$$

В практике принятия решений по выбору проектов целесообразно использовать все три получаемые оценки  $IRR_{cp}$ ,  $IRR_{min}$ ,  $IRR_{max}$ .

Интерпретация  $[NPV_{1i}, NPV_{2i}]_\alpha$  как характеристики неопределенности получаемого неинтервального значения  $IRR_\alpha$  позволяет сформировать количественную, выражаемую в денежных единицах, оценку риска инвестиций в рассматриваемый проект (степень неопределенности получаемых оценок  $IRR_{cp}$ ,  $IRR_{min}$ ,  $IRR_{max}$  как следствие неопределенности исходных данных) в виде:

$$R_{cp} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} (NPV_{2i} - NPV_{1i})}{n}. \quad (3.42)$$

Параметр  $R_{cp}$  может играть определяющую роль при оценке альтернативных проектов.

В результате расчетов для рассматриваемого примера получено:

$$\begin{aligned} IRR_{min} = 0,34; IRR_{max} = 0,327; IRR_{cp} = 0,335; R_{cp} = 1,56 & \text{ – для первого} \\ & \text{проекта;} \\ IRR_{min} = 0,322; IRR_{max} = 0,329; IRR_{cp} = 0,325; R_{cp} = 3,52 & \text{ – для второго} \\ & \text{проекта,} \end{aligned}$$

Рассматриваемые проекты имеют весьма близкие значения параметров  $IRR_{cp}$ ,  $IRR_{min}$ ,  $IRR_{max}$ , в то же время значение параметра риска  $R_{cp}$  для второго проекта более чем в два раза выше, чем у первого, что однозначно указывают на его меньшую предпочтительность.

Кроме описанных параметров, имеют смысл также  $IRR_{nr}$  – наиболее надежное значение  $IRR_{\alpha}$ , соответствующее минимальному по ширине интервалу  $[NPV_p, NPV_2]_{nr}$  среди всех  $[NPV_p, NPV_2]_{\alpha}$  и  $IRR_r$  – наименее надежное значение  $IRR_{\alpha}$ , соответствующее максимальному по ширине интервалу  $[NPV_p, NPV_2]_r$  среди всех  $[NPV_p, NPV_2]_{\alpha}$ . Ясно, что  $[NPV_p, NPV_2]_{nr}$  и  $[NPV_p, NPV_2]_r$  есть оценки риска для соответствующих  $IRR_{nr}$  и  $IRR_r$ .

В нашем примере различия между значениями  $IRR_{nr}$  для двух рассматриваемых проектов весьма незначительны при существенной разнице в оценках риска.

Математический аппарат нечетко-интервального анализа позволяет разработать методики многокритериальных оценок и оптимизации потока платежей предприятий в схемах инвестиционного проектирования.

Дело в том, что получаемое в результате расчета нечетко-интервальное значение  $NPV$  несет значительно больше полезной для практики информации, чем обычные четкие оценки. Однако его необходимо дополнительно интерпретировать, так как существующие нормы отчетности требуют указывать конкретные числа, а не нечеткие интервалы. Кроме того, с точки зрения инвестора вполне естественным является желание получить конкретное значение  $NPV$ , на которое можно ориентироваться при составлении, например, бизнес-плана, определенную оценку риска проекта, а также конкретные значе-

ния  $P_t$  и  $KV_t$ , рассчитанные с учетом существующей неопределенности исходных данных.

Решение этой проблемы возможно путем решения задачи оптимизации, в которой исходные нечеткие интервалы  $P_t$  и  $KV_t$  рассматриваются как ограничения на управляемые входные параметры, а  $d_t$  – как неуправляемый параметр, характеризующий неопределенность внешней по отношению к рассматриваемому проекту среды. Последнее объясняется экономической сущностью дисконта  $d$ , который определяется такими внешними рыночными факторами как динамика фондового рынка, изменение курса национальной валюты и пр.

Решаемая задача оптимизации является многокритериальной, что требует решения вопросов адекватной математической формализации частных критериев, их представления в единой унифицированной форме, не зависящей от физической сущности показателей качества, на основе которых строятся частные критерии. Теория нечетких множеств предлагает для этого удобный аппарат функций желательности, позволяющий перейти из пространства показателей качества в пространство соответствующих им критериев, значения каждого из которых унифицированы, измеряются степенью желательности, изменяющейся в интервале  $[0, 1]$ . Следует отметить, что использование функций желательности позволяет не делать принципиальных различий между критериями и ограничениями в математической формулировке задач оптимизации, что весьма похоже на ситуацию, возникающую при использовании метода штрафных функций.

В рассматриваемой задаче наиболее важным критерием является критерий максимизации чистого приведенного дохода  $NPV$ . Его построение осуществлялось в два этапа.

На первом этапе в результате подстановки исходных нечетких интервалов  $P_t$ ,  $KV_t$  и  $d_t$  в выражение (4.1) находится нечеткий интервал, характеризующий изменения возможности получения тех или иных значений  $NPV$  внутри интервала допустимых значений  $[NPV_p, NPV_d]$ .

На втором этапе строится частный критерий, отражающий требования к доходности проекта с учетом реальных ограничений. Способ построения этого частного критерия, опи-

сываемого функцией желательности  $\hat{d}_{NPV}(NPV)$ , очевиден: функцию желательности  $\hat{d}_{NPV}$  можно рассматривать лишь на интервале возможных значений  $NPV$  ( $[NPV_1, NPV_4]$ ), причем  $\hat{d}_{NPV}$  должна возрастать с ростом  $NPV$  (рис. 3.15). Важно отметить, что при этом не принимались в расчет возможности реализации тех или иных значений  $NPV$  внутри интервала допустимых значений, поскольку эта информация неявно учитывалась при построении ограничений на основе нечетких интервалов  $P_t$  и  $KV_p$ .

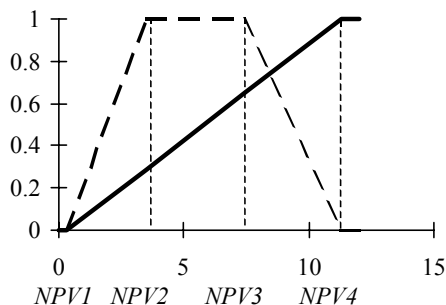


Рис. 3.15. Функция принадлежности  $\mu_{NPV}$  (---) и функция желательности  $\hat{d}_{NPV}(NPV)$  (—)

Исходные нечеткие интервалы  $P_t$  и  $KV_p$ , также рассматриваются как функции желательности  $\mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \dots, \mu_{KV_1}, \mu_{KV_2}, \dots$ , характеризующие ограничения на управляющие переменные (исходные интервалы уже построены таким образом, что при их интерпретации как функций желательности более предпочтительными оказываются те значения из интервалов  $P_t$  и  $KV_p$ , реализация которых более возможна). Поскольку эти функции желательности связаны с возможностью реализации тех или иных значений управляющих параметров, отвечающие им частные критерии являются критериями, в совокупности неявно характеризующими финансовый риск проекта.

В связи с этим возникает проблема объединения (свертки) частных критериев в некоторый обобщенный. Использование максиминного подхода гарантирует получение адекватных результатов, если при свертке используемые функции желательности возводить в степени, равные рангам этих час-

тных критериев. Поэтому максимизируемая функция или глобальный критерий строился в виде:

$$D(P_t, KV_t, d_t) = \min(\mu_{NPV}^{\alpha_1}(NPV(P_t, KV_t, d_t)), (\min(\mu_{P_1}, \mu_{P_2}, \dots, \mu_{KV_1}, \mu_{KV_2}, \dots))^{\alpha_2}), \quad (3.43)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – задаваемые инвестором ранги, характеризующие относительную значимость для клиента доходов и рисков;  $\mu_{NPV}^{\alpha_1}(NPV(P_t, KV_t, d_t))$  – значение функции желательности  $\mu_{NPV}^{\alpha_1}$  в точке  $NPV(P_t, KV_t, d_t)$ .

В итоге задача сводится к отысканию набора неинтервальных (четких) значений  $PP_1, PP_2, \dots, KKV_1, KKV_2, \dots$ , изменяющихся в пределах, ограниченных соответствующими нечеткими интервалами  $P_1, P_2, \dots, KV_1, KV_2, \dots$ , которые бы максимизировали глобальный критерий (3.43):

$$\{PP_t^{di}(d_t), KKV_t^{di}(d_t)\} = \arg \max D(P_t, KV_t, d_t). \quad (3.44)$$

Задача осложнялась тем, что дисконт полагался неуправляемым параметром, равномерно распределенным в заданном интервале, хотя при опросе экспертов можно получить некоторое распределение прогнозов значения  $d_t$ , которое в общем случае может быть представлено неким нечетким интервалом, описываемым соответствующей функцией принадлежности  $\mu_d(d_t)$ .

Поэтому процедура решения задачи осуществлялась следующим образом.

Из диапазона изменений дисконта случайным образом выбиралось значение, для которого с помощью метода случайного направленного поиска Ноллау-Фюрста находилось оптимальное решение (3.44), соответствующее наилучшему компромиссу между требованием снижения неопределенности результата и стремлением к получению максимальной прибыли. Соответствующие оптимуму значения  $PP_t^d$  и  $KKV_t^d$  являются оптимальными при данном значении дисконта с точки зрения этого компромисса. Далее, из интервала варьирования дисконта выбиралось следующее случайное его значение и вновь решалась задача оптимизации. Эта процедура выполнялась до тех пор, пока не набиралась статистически репрезентативная выборка оптимальных решений для различ-

ных значений дисконта. Итоговые оптимальные значения  $PP_t^0$  и  $KKV_t^0$  находились как средневзвешенные оценки с учетом степени возможности реализации различных значений  $d_i$ , задаваемой исходным нечетким интервалом  $d_i$ , с функцией принадлежности  $\mu_d(d_i)$ .

$$PP_t^0 = \left( \sum_{i=1}^m PP^{d_i}(d_i) \cdot \mu_d(d_i) \right) / \sum_{i=1}^m \mu_d(d_i),$$

$$KKV_t^0 = \left( \sum_{i=1}^m KKV^{d_i}(d_i) \cdot \mu_d(d_i) \right) / \sum_{i=1}^m \mu_d(d_i),$$
(3.45)

где  $m$  – число дискретных значений дисконта  $d_i$ , использовавшихся при решении задачи.

В силу построения численные значения обобщенного критерия (3.43) могут изменяться от 0 до 1, причем степень близости  $D$  к единице в точке найденного оптимума количественно характеризует успех решения задачи оптимизации. Таким образом, значение глобального критерия в точке оптимума в данном случае содержит важную информацию, которую целесообразно учитывать при расчете средневзвешенных значений  $PP_t^0$  и  $KKV_t^0$ . Для учета этого обстоятельства предложены выражения:

$$PP_t^0 = \left( \sum_{i=1}^m P^{d_i} \cdot (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)) \right) / \sum_{i=1}^m (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)),$$

$$KKV_t^0 = \left( \sum_{i=1}^m KKV^{d_i} \cdot (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)) \right) / \sum_{i=1}^m (\mu_d^{\beta_1}(d_i) \wedge D^{\beta_2}(d_i)).$$
(3.46)

где  $\hat{a}_1, \hat{a}_2$  – ранги, причем  $\sum_{i=1}^n \beta_i = n$ , где  $n$  — число рангов;  $D(d_i)$  – значение обобщенного критерия (3.43) в точке оптимума для  $i$ -го значения дисконта.

Использование выражений (3.46) дает возможность учесть, помимо надежности значений  $d_i$ , количественную меру эффективности в оптимуме компромисса между стремлением снижения неопределенности результата и максимизации дохода для каждого из выбранных значений дисконта.



В результате решения задачи оптимизации получаем четкие значения  $PP_t^0$  и  $KKV_t^0$ , на которые можно ориентироваться при реализации инвестиционного проекта. Кроме того, можно определить оптимальное нечетко-интервальное значение  $NPV$ , подставив эти оценки и нечетко-интервальный дисконт  $d$  в выражение (3.1).

Рассмотрим результаты, полученные на основе приведенного выше модельного примера первого из проектов, представленных на рис. 3.14. В таблице 3.8 приведены рассчитанные рассмотренными выше способами оптимальные для этого проекта значения  $PP_t^0$  и  $KKV_t^0$ .

Таблица 3.8

Оптимальные значения  $PP_t^0$  и  $KKV_t^0$

Год	Выражения (3.45)		Выражения (3.46)	
	$P_t$	$KV_t$	$P_t$	$KV_t$
0	0.00	2.49	0.00	2.50
1	0.00	0.83	0.00	0.79
2	8.05	0.00	8.04	0.00
3	7.12	0.00	7.09	0.00

Соответствующие значения чистого приведенного дохода в точке найденного оптимума получены в виде нечетких интервалов:

$$NPV_{(3.45)} = \{4.057293, 6.110165, 8.073906, 9.454419\};$$

$$NPV_{(3.46)} = \{4.065489, 6.109793, 8.064094, 9.436519\}.$$

Полученные данные свидетельствуют о том, что на практике итоговые результаты, полученные с использованием выражений (3.45), (3.46) различаются незначительно.

По этим данным, пользуясь методикой, описанной в подразделе 3.6, можно определить степень риска полученных оптимальных значений, которая будет обусловлена лишь внешней по отношению к проекту неопределенностью дисконта.

В качестве промежуточных результатов решения задачи оптимизации были получены четкие, неинтервальные значения  $NPV_t^0$ , соответствующие максимальным значениям глобаль-

ного критерия (3.43) для дискретных значений  $d_i$  из диапазона возможных значений дисконта. Фактически  $NPV_i$  являются четкими значениями дохода, полученными в точке оптимума при фиксированном значении  $d_i$ . Поэтому для получения итоговых неинтервальных оценок чистого приведенного дохода, средневзвешенных по интервалу варьирования  $d$ , использовалось выражение:

$$NPV_{opt} = \frac{\sum_{i=1}^m NPV_{di} \cdot \mu_{NPV}(NPV_{di})}{\sum_{i=1}^m \mu_{NPV}(NPV_{di})}, \quad (3.47)$$

где  $NPV_{d_i}$  – значение  $NPV$  в точке оптимума для  $i$ -о значения дисконта.

Для рассматриваемого примера из (3.47) получаем  $NPV_{(3.45)} = 6,8931$ ,  $NPV_{(3.46)} = 6,8942$ .

На рис. 3.16 представлен нечеткий интервал, рассчитанный для полученных четких (неинтервальных) оптимальных значений потоков платежей, в сопоставлении с исходным интервалом, полученным прямым расчетом по исходным нечетким интервалам  $Pt$  и  $K\dot{V}t$  и  $d$ , без использования оптимизации. Нечетко-интервальный вид получаемого при этом  $NPV$  обусловлен исключительно нечетко-интервальной формой задания дисконта  $d$ .

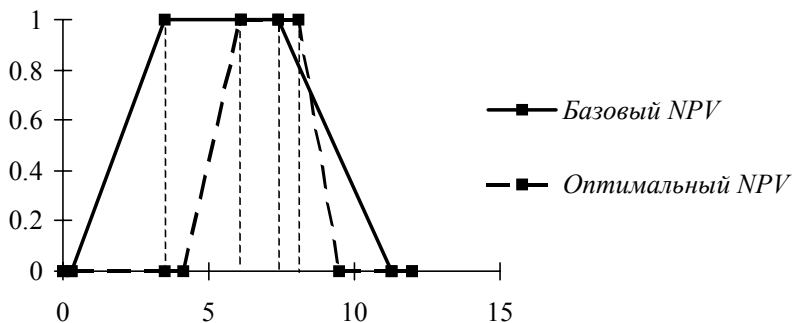


Рис. 3.16. Сравнение базового нечеткого интервала NPV с оптимальным интервалом

Как видно из рисунка, оптимизация позволила достигнуть поставленных целей: налицо существенный рост прогнозируемых значений  $NPV$ . При этом также достигается сужение нечеткого интервала  $NPV$  в точке оптимума, что свидетельствует о снижении финансового риска.

## ЛЕКЦИЯ 4. АКЦИИ И ОРГАНИЗАЦИЯ ТОРГОВЛИ ЦЕННЫМИ БУМАГАМИ

### 4.1. Формирование цены акции, прибыли и дивиденды. ММ-парадокс. Риск и ограничение риска. Финансовый риск. Хеджирование. Опционы и контракты на финансовом рынке

В отличие от ценных бумаг с фиксированным доходом эффективность операций с акциями может быть лишь условно прогнозируема.

Можно записать формулу зависимости эффективности от цен и дивидендов:

$$R = \frac{C_1 - C_0 + d}{C_0},$$

где  $C_0$  – цена покупки,  $C_1$  – цена продажи, а  $d$  – дивиденды, полученные за время владения акцией.

Напомним, что дивиденды выплачиваются из прибыли, и только собрание акционеров (а точнее, владелец контрольного пакета) решает, какую долю прибыли направить на выплату дивидендов. Это решение или последовательность таких решений именуют дивидендной политикой корпорации.

Модильяни и Миллер высказали парадоксальное утверждение: в условиях конкурентной экономики дивидендная политика не влияет на эффективность инвестиций в акции.

Пусть в момент покупки акции корпорация имела капитал  $K^{(0)}$  разделенный на  $N$  акций. Формально цена акции – это приходящаяся на нее доля капитала

$$C^{(0)} = \frac{K^{(0)}}{N}.$$

За квартал фирма заработала прибыль  $\Pi$ , составляющую долю  $r_n$  от ее начального капитала,

$$\Pi = r_n K^{(0)},$$

и выделила долю  $g$  из нее на выплату дивидендов, так что на каждую акцию пришлось

$$d = \frac{gr_n K^{(0)}}{N}$$

(число акций предполагается неизменным).

Капитал  $K^{(1)}$ , оставшийся в распоряжении корпорации и способный далее приносить прибыль, равен

$$K^{(1)} = K^{(0)} + (1 - g)\Pi = [1 + (1 - g)r_n]K^{(0)}.$$

Новая цена  $C$  равна

$$C^{(1)} = \frac{K^{(1)}}{N} = \frac{1 + (1 - g)r_n}{N} K^{(0)}.$$

Подставляя теперь выражение для цены и дивидендов в формулу эффективности, убеждаемся, что она не зависит от дивидендной политики, а определяется только продуктивностью  $r_n$  фирмы

$$R = \frac{[1 + (1 - g)r_n]K^{(0)} + gr_n K^{(0)} - K^{(0)}}{K^{(0)}} = r_n.$$

Вывод вызывает сомнения. Прежде всего цена акции введена формально, как доля капитала, но даже если существует возможность объективно оценить капитал, то рыночная цена акций, как правило, не будет соответствовать доле этой оценки. Поэтому эффективность рыночной операции (купить, получить дивиденды, продать по новой цене) не будет равна эффективности, исчисленной в «объективных» ценах.

Предположим, однако, что инвестор не собирается продавать акцию. Через квартал он будет иметь на руках ту же акцию, но имеющую новую цену, и дивиденд наличными. При

сохранении продуктивности фирмы капитал, вложенный в акцию, будет иметь эффективность  $r_n$ , определяемую только продуктивностью. Капитал же, полученный как дивиденд, может быть вложен в любую другую операцию на рынке. Отсюда ясно, что дивидендная политика фирмы не имеет значения, только если капиталовложения в любую другую операцию будут так же эффективны, как и капиталовложения в данную фирму. Именно такое свойство идеальной конкурентной экономики и обеспечивает справедливость утверждения Модильяни – Миллера.

В реальной же экономике инвестор может надеяться вложить полученный дивиденд и более эффективно, ориентируясь на текущую конъюнктуру, где эффективности вложений в различные предприятия все время меняются.

Вернемся к проблеме оценки цены акции. Вновь можно рассмотреть ситуацию, когда акция все время остается у одного владельца, или акцентировать внимание на собственной цене акции независимо от того, в чьих руках она находится. Все, что получает владелец акции, – это дивиденды, но поскольку эти дивиденды поступают в разное время, при их суммировании необходимо принимать во внимание дисконт.

Приведенная к начальному моменту (момент покупки) сумма всех дивидендов равна

$$C^{(0)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{d^{(t)}}{(1+r)^t},$$

где  $r$  – процент, который может получить владелец, реинвестируя дивиденды,  $d^{(t)}$  – дивиденд за квартал  $t$ .

Простейший прогноз дивидендов исходит из предположений, что продуктивность капитала корпорации остается неизменной, равно как и ее дивидендная политика. В этом случае за каждый квартал капитал изменяется с коэффициентом роста:

$$1+(1-g)r^n$$

и через  $t$  кварталов окажется равным

$$K^{(1)} = [1 + (1 - g)r_n]^t K^{(0)},$$

а соответствующий дивиденд за квартал  $t$  окажется равным:

$$d^{(t)} = \frac{gr_n}{N} K^{(t-1)} = \frac{gr_n}{N} [1 + (1-g)r_n]^{t-1} K^{(0)}, t=1,2, \dots$$

Теперь можно вычислить прогноз цены акции как  $PV$  потока дивидендов:

$$C^{(0)} = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{gr_n}{N} K^{(0)} \cdot \frac{1}{1+r} \left[ \frac{1+(1-g)r_n}{1+r} \right]^{t-1} = \frac{K^{(0)}}{N} \cdot \frac{gr_n}{r-r_n+gr_n}.$$

Вывод: прогноз цены акции отличается от ее формального значения как доли капитала корпорации множителем

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{g} \left( \frac{r}{r_n} - 1 \right)}$$

и зависит от дивидендной политики.

Однако если акционер не может добиться большей эффективности, реинвестируя дивиденды в другие финансовые операции, то он предпочтет вложить их в акции той же корпорации. При этом  $r = r_n$ , и прогнозная цена не будет зависеть от дивидендной политики, совпадая с формальным значением. Поскольку в условиях идеальной конкурентной экономики отсутствует возможность более эффективных конкурентных вложений, ММ-парадокс оправдан.

На реальном рынке цены акций меняются непрерывно, формируясь как результат соглашений между большим числом покупателей и продавцов. Тем не менее на уровень реальных цен, несомненно, влияют прогнозные оценки, опирающиеся, в свою очередь, на прогноз продуктивности каждой корпорации, ее дивидендной политики и прогноз эффективности альтернативных вложений.

Финансовая операция (сделка) называется рискованной, если ее эффективность недетерминирована, т. е. не полностью известна в момент заключения сделки.

Недетерминированность эффективности, а следовательно, рискованность – свойство почти любой сделки, связанной с покупкой и продажей ценных бумаг.

Эффективность ценных бумаг зависит от трех факторов: цены покупки, промежуточных выплат и цены продажи. Первый фактор детерминирован: цена точно известна в момент совершения сделки. Применительно к процентным ценным бумагам существует риск невыполнения обязательств. Может быть внезапно принято решение об отсрочке погашения государственных ценных бумаг, корпорация может оказаться финансово несостоятельной и не способной вернуть долги.

С другой стороны, динамика курсовой стоимости процентных ценных бумаг также заранее неизвестна. Владелец процентных ценных бумаг может продать их в любой момент до объявления срока погашения (исполнения), если он решит, что текущий курс выгоден, но в случае изменения этого курса в будущем в сторону еще большей эффективности он может оказаться в проигрыше.

Однако эффективность процентных ценных бумаг государства и крупных корпораций может быть прогнозируема с небольшими отступлениями от истины. В случае банкротства кредитные обязательства покрываются в первую очередь.

Совершенно иной является ситуация с акциями. Условия покупки акций не содержат в себе никаких формальных обязательств компании, связанных с выплатой дивидендов или с выкупом по какой-либо фиксированной цене. Приобретение акций – безусловно, рискованная финансовая операция.

Финансовый риск – это не обязательно разорение. В основном финансовый риск — это упущенные возможности.

Эффективность операций с ценными бумагами, как правило, заранее неопределенна. Инвестор должен принимать решение, проводя сравнение прогноза эффективности данной ценной бумаги с эффективностью возможного безрискового вклада.

**Хеджирование (hedging)** – любая схема, позволяющая исключить или ограничить риск финансовых операций, связанных с рисковыми ценными бумагами.

Полное исключение риска – крайне редкое явление в финансовой деятельности.

*Пример.* Инвестор-кредитор предоставляет деньги в долг другому лицу. Должник выдает кредитору расписку – обязательство вернуть деньги с добавлением фиксированного рос-

та  $r$ . Эта расписка является простейшей формой ценной бумаги. На первый взгляд, операция является безрисковой, поскольку даже в случае отказа долг будет взыскан в судебном порядке. В качестве обеспечения оплаты указывается принадлежащий должнику дом.

На самом деле риск сохраняется, поскольку в результате возможного пожара, который может уничтожить заложенное строение, должник становится неплатежеспособным.

Однако в качестве ограждения от такого риска кредитор может приобрести за свой счет страховой полис, гарантирующий выплату в случае пожара определенной суммы, достаточной для возврата долга с процентами. При этом действительная эффективность вклада окажется ниже в зависимости от возможных вариантов развития событий.

Примем для простоты за единицу (например, 1 млн руб.) сумму, которую ассигнует кредитор на всю операцию. Пусть из нее  $x$  передается в виде долга, а  $1-x$  направляется на покупку полиса.

В варианте 1, если пожара не произойдет, эффективность вклада составит

$$R_1 = (1+r)x - 1.$$

В варианте 2, если пожар уничтожит строение и должник окажется несостоятельным, кредитор получит от страховой компании сумму  $q(1-x)$ , где  $q$  – отношение страхового возмещения к цене полиса.

Таким образом, эффективность вклада во второй ситуации равна

$$R_2 = q(1-x) - 1.$$

Однако можно выбрать  $x$  так, чтобы  $R_1 = R_2$ , что достигается при

$$x = q / (1+r+q).$$

Такая схема хеджирования полностью исключает неопределенность. Безрисковая комбинация двух ценных бумаг (расписки и полиса) гарантирует эффективность, равную

$$R = R_1 = R_2 = \frac{(1+r)q}{1+r+q} - 1.$$



При известной величине  $q$  всегда можно выбрать  $r$  так, чтобы получить любую гарантированную эффективность вклада.

Приведенный пример является условной ситуацией, не характерной для операций на рынке ценных бумаг, но сам принцип страхования с помощью дополнительных затрат реализуется и на рынке.

**Опцион** – это документ, удостоверяющий право на покупку или продажу какого-либо товара по фиксированной цене.

Для финансового рынка особенно существенны опционы на товары, фигурирующие на нем, т.е. акции, валюта и т.д. Опцион, по существу, является страховым полисом, обеспечивающим защиту от неопределенности. Купив акции и одновременно опцион на их продажу (put option), инвестор гарантирует, что даже если рыночная цена акций через год резко упадет, то потери будут ограничены. Купив опцион на покупку (call option), инвестор гарантирует защиту от роста цены на акции выше указанной в опционе. Опцион имеет цену (премию), зависящую от степени неопределенности, с которой он борется.

Принято различать два типа опционов: европейский, когда опцион дает право купить (или продать) по фиксированной цене в определенный день (expiration day), и американский, дающий право купить (или продать) в любой день вплоть до определенного момента. Сами по себе опционы являются таким же товаром, как и акции.

Продавец опциона должен предоставить определенный залог, гарантирующий выполнение контракта. Основная часть сделок проходит через корпорацию OCC (Option Clearing Corp.), которая дает абсолютную гарантию сделки.

Кроме основных видов опционов (calls, puts) на акции существует множество других форм: Index Option – форма игры на курсе группы акций, характеризуем сводным индексом: индекс Доу-Джонса (по названию фирмы, выпускающей главную финансовую газету «Wall Street Journal») – сумма цен акций 30 ведущих корпораций, разделенная на некоторое число (divisor); Standard and Poor's 500 Stock Index — взвешенная сумма цен акций 500 крупнейших корпораций, т.е., грубо говоря, цена «рынка».

Index Option заключается не на фиксированное число акций – просто продается право получить сумму,

пропорциональную приросту индекса к фиксированному моменту, если индекс действительно возрастет. Таким образом, Call Index Option – это форма ставки с расчетом на движение рынка вверх (на положительную эффективность рынка), соответственно put IO – ставка на движение его вниз.

Существуют и опционы на иностранную валюту, на билеты казначейства США и т.д.

Более того, опционы продаются и специальными группами: один put и один call на один и тот же вид акций с одинаковой str. price (два puts и один call; один put и два calls). Эти группы имеют названия (straddle, strip, strap), происходящие от жаргонных терминов, применяемых игроками на ипподроме.

Популярным вариантом опциона на покупку являются warrant — опцион на покупку акций корпорации, выпускаемый самой корпорацией и обеспечиваемый ее достоянием. Основным практическим отличием warrant от обычного call option является большая его длительность (5 лет и более). Warrant также может продаваться в сочетании с другими ценными бумагами, например, бонами той же корпорации.

Принципиально отличным от опционов финансовым инструментом являются контракты.

Контракты на будущее (futures) – основной тип ценных бумаг, фигурирующий на товарных биржах.

1. Контракт является обязательством продавца поставить в определенное место в определенный месяц определенное количество товара. После доставки товара покупатель обязан заплатить продавцу заранее (в момент заключения контракта) обусловленную цену.

2. Контракт является ценной бумагой, т.е. товаром сам по себе, и может продаваться исходным покупателем и перепродаваться на бирже вплоть до фиксированного в нем месяца поставки.

3. Для того чтобы гарантировать выполнение контракта, необходимо вносить обеспечение наличными (или их эквивалентом в виде ликвидных ценных бумаг).

4. Будучи ценными бумагами, контракты допускают возможность использования их в качестве предмета опциона.

В заключение отметим, что контракты на будущую покупку (продажу) с фиксированными условиями сделки могут заклю-

чаться не только на реальные товары (зерно, металлы и т.п.), но и на любые ценные бумаги. В особенности это касается контрактов на иностранную валюту, казначейские билеты, акции и даже на пакеты различных акций, объединенных в индексные группы, причем последний вариант особенно распространен.

Именно валютные фьючерсы являются наиболее популярными на нарождающихся финансовых рынках России и Беларуси, чему способствуют неустойчивость валютного курса рубля и высокий общий темп инфляции.

#### **4.2. Портфель ценных бумаг. Эффективность ценных бумаг как случайная величина. Влияние склонности к риску лиц, принимающих решения**

Основной принцип работы на рынке ценных бумаг соответствует житейской мудрости: «Никогда не клади все яйца в одну корзину». Применительно к рынку это означает, что инвестор не должен приобретать ценные бумаги только одного вида. Необходимо разнообразие, диверсификация вклада. В противном случае инвестор обрекает себя либо на низкую эффективность вклада, либо на излишне высокий риск.

Финансовый риск связан с неопределенностью эффективности операции в момент заключения сделки, обусловленной невозможностью прогноза цены в будущем (а для акций – и будущих дивидендов). Если инвестор вложит свой капитал в акции нескольких компаний, то эффективность, конечно, также будет зависеть от курсовых колебаний, но только не каждого курса, а усредненного. Средний же курс, как правило, колеблется меньше, поскольку при повышении курса одной из ценных бумаг курс другой может понизиться и колебания могут взаимно погаситься.

Именно поэтому опытный инвестор является держателем нескольких ценных бумаг (векселей, акций разных корпораций, контрактов, опционов), именуемых портфелем инвестора.

Рассмотрим финансовую операцию, заключающуюся в покупке ценных бумаг по известной цене и в продаже их в будущем по цене, заранее неизвестной (при этом, обладая ценными бумагами, инвестор может рассчитывать на получение

промежуточных выплат, например, дивидендов на акции, также заранее неизвестных).

Основная гипотеза, которая позволяет анализировать такую финансовую операцию, заключается в следующем: будем считать, что любое конкретное значение  $r$  эффективности операции является реализацией случайной величины  $R$ .

Эта гипотеза позволит использовать для изучения свойств портфеля ценных бумаг правила теории вероятностей, знакомство с элементарными основами которой далее предполагается.

Необходимый минимум знаний: требуется представлять себе, что такое

а) ожидаемое значение случайной величины  $R$ , обозначаемое

$$m = E\{R\}; \quad (4.1)$$

б) вариация (дисперсия) случайной величины

$$V = E\{(R - m)^2\} \quad (4.2)$$

и стандартное (среднеквадратичное) отклонение

$$\sigma = \sqrt{V} \quad (4.3)$$

в) ковариация двух случайных величин  $R_1$  и  $R_2$

$$V_{12} = E\{(R_1 - m_1)(R_2 - m_2)\}. \quad (4.4)$$

Здесь и далее используется операция вычисления математического ожидания  $E\{\}$ , применяемого к случайной величине, стоящей в скобках. Ожидаемое значение интуитивно понимается как среднее по всем значениям (реализациям), вычисленное с учетом частоты их возможного появления.

Если вариация эффективности равна нулю, то эффективность не отклоняется от ожидаемого значения, т.е. нет неопределенности, а следовательно, и риска. Чем больше вариация, тем в среднем больше отклонение, т.е. выше неопределенность и риск. Поэтому первоначально будем считать величину вариации (или среднеквадратичное отклонение  $\sigma$  — СКО) мерой риска (зачастую величину СКО просто именуют риском, хотя это не совсем точно).

С одной стороны, для инвестора важно получить большую ожидаемую эффективность вклада. С другой стороны, важны гарантии, важно уменьшить риск.

Если представилась возможность выбора между двумя видами ценных бумаг, причем  $m_1 > m_2$ , а  $\sigma_1 = \sigma_2$ , то любой разумный инвестор вложит деньги в 1-й вид. Если, напротив,  $m_1 = m_2$ , а  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то инвестор выберет 2-й вид, поскольку с ним связана меньшая неопределенность и, следовательно, меньшая степень риска.

Но в общем случае, когда  $m_1 < m_2$ , а  $\sigma_1 < \sigma_2$ , (или наоборот) однозначного разумного решения нет. Инвестор может предпочесть вариант с большим ожидаемым доходом, связанным, однако, с большим риском, либо вариант с меньшим ожидаемым доходом, но более гарантированным и менее рискованным. Каждый инвестор, вкладывающий деньги в акции или любой рискованный вид ценных бумаг, является в некотором смысле игроком, и выбор, который он делает, зависит от его склонности к риску.

Рассмотрим диаграмму, где каждый вид ценных бумаг представлен точкой с координатами  $(m_j, \sigma_j)$ .

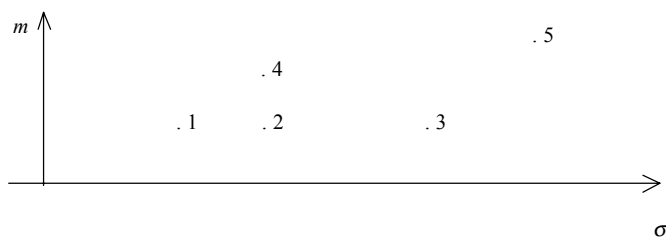


Рис. 4.1. Диаграмма, представляющая каждый вид ценных бумаг точкой с координатами  $(m_j, \sigma_j)$

Чем больше ожидаемый эффект, тем выше расположена точка; с увеличением риска точка располагается правее.

Очевидно, что опытный инвестор предпочтет вложение, представленное точкой 1, вложениям, представленным точками 2 и 3. Он предпочтет также вложение, представленное точкой 4, вложению, представленному точкой 2. Однако лишь от склонности к риску зависит выбор им вложений, представленных точками 1, 4 или 5.

#### **4.3. Основные понятия технического и фундаментального анализа на рынке ценных бумаг**

Современный технический и фундаментальный анализ модно образно представить как, соответственно, тактику и стратегию инвестиционного менеджмента.

Инвестиционный менеджмент – очень широкое понятие, охватывающее различные проблемы, связанные с выбором схемы капиталовложений и ее реализацией. Рассмотрим кратко только инвестиции в ценные бумаги, уделив основное внимание организации работы посредников рынка и использованию ими практических методов финансового анализа.

##### **Функции посреднических структур**

Начальным звеном в движении ценных бумаг является корпорация-эмитент, конечным – инвестор, приобретающий ее во владение. Однако на пути от эмитента к инвестору работают организации-посредники, определяющие лицо рынка. С некоторой условностью можно разделить посредников на три класса: брокеры, дилеры и инвестиционные фонды.

Работа брокера состоит в купле-продаже ценных бумаг по поручению клиента-инвестора. Заработок брокера составляют комиссионные за услуги. Формально брокера может не интересоваться инвестиционная эффективность ценных бумаг. Он выигрывает лишь на расширении круга клиентов и, прежде всего, на привлечении клиентов, делающих крупные заказы. Однако, как правило, брокер выполняет и функцию консультанта, помогая клиентам принять правильные решения.

Еще более серьезные требования предъявляются к работе дилера, который приобретет ценные бумаги за свой счет и продает их от своего имени. Иначе говоря, дилер является и инвестором, но, как правило, он не заинтересован в длительном держании ценных бумаг с целью извлечения дохода от купонных платежей или дивидендов. Основной доход дилер получает на курсовой разнице, складывающейся во времени или пространстве (на различных рынках).

Как уже указывалось, брокер или дилер – это скорее наименования функций, и во многих случаях обе эти функции осуществляет одно и то же лицо или фирма.

Особый класс посредников составляют инвестиционные фонды. Их основная функция состоит в приобретении портфеля ценных бумаг и эмиссии акций под образованный таким образом капитал. Владельцы акций фонда приобретают право на дивиденды, получаемые с этого капитала.

Таким образом, инвестиционный фонд, с одной стороны, выполняет функции дилера, приобретающего и продающего ценные бумаги из своего портфеля, а с другой стороны, является эмитентом, поставляющим свои ценные бумаги на рынок.

В США различают три основных типа фондов:

- 1) фонды с фиксированным портфелем (fixed unit trusts);
- 2) «замкнутые» фонды (closed end funds);
- 3) «взаимные» фонды (mutual funds open end funds).

Фонды 1-го типа образуются одним спонсором, в качестве которого обычно выступает большая брокерская фирма. Спонсор покупает некоторый пакет ценных бумаг, помещает его на хранение в банк (доверенное лицо, frustee) и продает вкладчикам акции. Все доходы от портфеля выплачиваются вкладчикам через банк. Активное управление составом портфеля не производится, поэтому затраты на управление, выплачиваемые банку, минимальны (0.15%). Спонсор-инициатор лишь определяет начальную структуру (она обычно включает лишь notes и bonds). За свои усилия и риск спонсор получает компенсацию, продавая акции по цене несколько выше доли исходного капитала, вложенного в портфель. Например, при исходной покупке бонов на 10 млн. долл. выпускается 1 млн. акций, продаваемых затем по 10.35 долл. за акцию. Если все они будут проданы, спонсор заработает 350 тыс. долл. за вычетом операционных затрат в 15 тыс. долл.

Срок работы такого фонда заранее ограничен. Остальные фонды имеют, как правило, неограниченный срок существования, т.е. являются постоянно действующими организациями, имеющими дирекцию и управляющих. На практике именно управляющие выбирают дирекцию фонда, хотя теоретически дирекция, выбираемая акционерами, назначает управляющих. Заработок управляющих зависит от рыночной цены фонда, поэтому они заинтересованы в ее росте, достигаемом за счет маневрирования составом портфеля.

Особенностью фондов 2-го типа является то, что число акций не может быть уменьшено, но может быть увеличено, как правило, за счет выплаты дивидендов в виде дополнительных акций. Однако выпуск дополнительных акций для продажи осуществляется редко, поэтому такие компании имеют ограниченный круг вкладчиков. Тем не менее, сами вкладчики могут продавать и покупать эти акции, которые котируются на бирже, как и всякие другие, о чем публикуется соответствующая информация в виде набора

Net Asset Value	Price	Diff.
-----------------	-------	-------

где первый столбец означает долю стоимости фонда, приходящуюся на одну акцию, второй – последнюю цену продаж и последний – их разность в процентах.

Фонды 3-го тип наиболее распространены, поскольку наиболее гибки и непрерывно осуществляют выпуск новых акций на продажу, если объем портфеля (в рыночных ценах) увеличивается. Иначе говоря, цена акций поддерживается примерно постоянной, а доля, приходящаяся на каждую акцию, не меняется.

Именно во «взаимных» фондах в наиболее полной мере проявляются все функции финансового менеджмента:

- формирование исходного портфеля;
- первичная эмиссия акций;
- управление составом портфеля;
- повторная эмиссия.

Как и в любой управленческой структуре, эти функции исполняют следующие группы служащих:

собственно менеджеры – лица, принимающие окончательное решение (ЛПР);

служащие, реализующие эти решения по указанию менеджера;

аналитики – лица, подготавливающие рекомендации для ЛПР и планы реализации решений.

Далее остановимся в основном на функциях финансовых аналитиков, что позволит согласовать общие теоретические представления с практикой работы на рынке ценных бумаг.



### **Традиционный фундаментальный анализ**

Вплоть до 70-х годов в финансовом анализе господствовали две традиционные школы, взгляды и методы которых были во многом противоположны.

Первое направление, именуемое фундаментальным анализом, основано на представлении, что поведение курса ценных бумаг является следствием, отражением состояния дел в корпорации, являющейся эмитентом, а также, возможно, состояния экономики в целом или отрасли, в которой действует корпорация.

Представители школы фундаментального анализа главное внимание уделяют изучению финансовой отчетности, которую обязана публиковать каждая акционерная компания открытого типа.

Чтобы понять основную идею подхода, вспомним теоретическую формулу, дающую прогноз цен акции:

$$c^0 = \frac{K^{(0)}}{N} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{g} \left( \frac{r}{r_n} - 1 \right)}, \quad (4.5)$$

где  $K^{(0)}$  – капитал корпорации;  $N$  – число эмитированных ею акций;  $r_n$  – продуктивность капитала;  $r$  – эффективность альтернативного вложения дивидендов;  $g$  – доля прибыли, направленная на выплату дивидендов.

В этой формуле в принципе сконцентрированы основные факторы, отражающие текущее состояние корпорации, способность ее к развитию путем приумножения капитала, а также влияние принятой в корпорации схемы управления доходами. Конечно, все дано в обобщенной форме, и, более того, остается неясным, как найти конкретные числовые значения факторов.

В определенной мере ответ на этот вопрос дает знакомство с балансом корпорации.

Под капиталом при этом понимаются чистые активы, обеспечивающие данный вид ценных бумаг. Поскольку формула (4.5) была введена для обычных акций (common stocks), то обеспечивающие их чистые активы равны общим активам

баланса за вычетом нематериальных активов, заемных средств и балансовой стоимости (book-value) привилегированных акций. Значительно сложнее оценить продуктивность корпорации. Обычно ее ассоциируют с показателем рентабельности, рассчитываемым как отношение балансовой прибыли к сумме среднегодовых стоимостей основных производственных фондов и материальных оборотных средств, хотя, по-видимому, в числителе более рационально указывать чистую прибыль после выплаты налогов.

Показатель  $g$ , характеризующий дивидендную политику, целесообразно оценивать как среднее значение отношения «дивиденды – прибыль» за ряд отчетных периодов, а это требует накопления архивных данных по каждой оцениваемой корпорации. Наконец, возможно, наиболее сложным является показатель  $r$  эффективности альтернативных инвестиций, поскольку это требует представления о состоянии экономики в целом.

Подчеркнем, что по существу дела необходимо представление об эффективности инвестиций в будущем, причем ни в коей мере нельзя ориентироваться ни на наиболее низкую безрисковую эффективность, ни на некую среднюю эффективность по экономической системе в целом. Наиболее часто рекомендуют использовать среднюю оценку по ценным бумагам с одинаковой или близкой надежностью, степенью риска.

Фундаментальный анализ не пользуется формальными определениями степени риска. Основная идея состоит в вычислении некоторых коэффициентов, характеризующих платежеспособность и финансовую устойчивость предприятия.

Стандартные показатели платежеспособности таковы:

коэффициент абсолютной ликвидности  $K_{a1}$ , равный отношению суммы денежных средств и стоимости ликвидных ценных бумаг к краткосрочным обязательствам корпорации;

коэффициент ликвидности баланса  $K_1$ , расчет которого отличается от  $K_{a1}$  введением в числитель дебиторской задолженности;

коэффициент покрытия баланса  $K_p$ , где в числитель вводится еще и сумма материальных оборотных средств.

Очевидно, что все эти коэффициенты отражают способность предприятия расплатиться по краткосрочным обязательствам за счет активов с разной степенью ликвидности, возможности быстро превратить их в денежные средства.

Оценку корпорации с точки зрения платежеспособности принято считать благополучной, если

$$K_{a1} \geq 0.2; \quad K_1 \geq 0.5; \quad K_p \geq 2.$$

Нарушение этих условий отнюдь не ставит корпорацию в положение неплатежеспособного должника, банкрота, а лишь свидетельствует о возможности возникновения такой ситуации, приводящей к обесцениванию акций.

Перегруженность корпорации не только краткосрочными, но и долгосрочными обязательствами характеризует и другие показатели финансовой устойчивости, например, коэффициент автономии  $K_a$ , вычисляемый как доля собственных средств в общем итоге баланса.

Принято считать положение нормальным, если  $K_a \geq 0.5$ , или, что то же самое, заемные средства не превышают собственных.

Наконец, надо помнить, что корпорация обязана выплачивать прежде всего проценты по долгам, в том числе в виде эмитированных ею бондов, затем дивиденды по привилегированным акциям и только из остатка можно платить дивиденды. Поэтому, с точки зрения владельцев обычных акций, обязательные выплаты по привилегированным акциям могут рассматриваться как долговые обязательства. Вместе с тем отказ от выплаты «привилегированных» дивидендов по закону не является основанием для обвинения корпорации в неплатежеспособности.

Следовательно, можно сказать, что фундаментальный анализ считает вложения в ценные бумаги корпораций близкими по надежности (степени риска), если близки их показатели платежеспособности и финансовой устойчивости.

### **Традиционный технический анализ**

Основным положением другой традиционной школы финансового анализа, именуемой школой так называемого технического анализа фондовых рынков, является утверждение, что вся информация, которая может быть полезной для принятия решений на рынке, содержится в самой истории рынка, в движении курсов ценных бумаг.

Традиционную школу технического подхода часто называют графической, поскольку ее главным инструментом является визуализация последовательности цен в виде графиков и рассмотрение особенностей этих графиков как средства пред-

сказания цен в будущем. Отражая особенности текущей информации, графики обычно стоят в виде так называемых гистограмм (рис. 4.2). На оси абсцисс указываются точки, соответствующие последовательным дням биржевой торговли. По оси ординат для каждого дня строится отрезок, крайние точки которого соответствуют нижней или верхней ценам за день, а штрихом выделяют цену закрытия. Таким образом, гистограмма легко строится на основании стандартной публикации и отражает как изменение цен изо дня в день, так и разброс цен в течение дня. При анализе гистограмм принято выделять характерные моменты, называемые разрывами, когда нижняя цена предшествующего дня оказывается выше верхней последующего дня и наоборот. При этом различают разрывы 4 видов: обыкновенные, беглые, отрывные и окончательные. Примеры всех видов разрывов приведены на рис. 4.3.

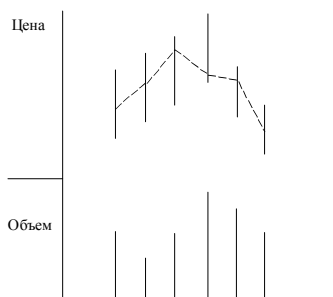


Рис. 4.2. Диаграмма динамики цен на бирже

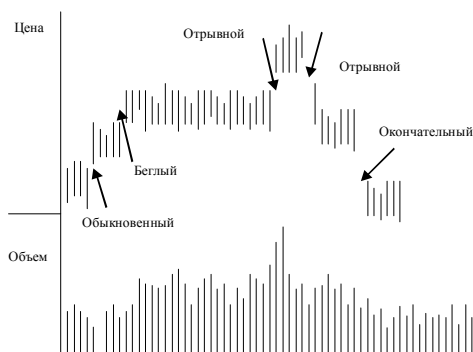
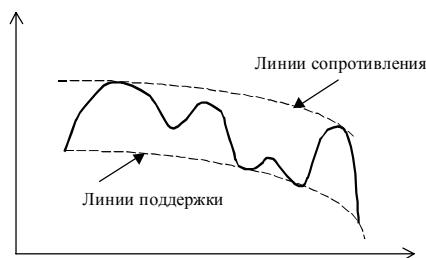


Рис. 4.3. Основные типы разрывов цен

Обыкновенный разрыв характеризуется низким объемом сделок и отсутствием предшествующей тенденции к росту или подъему цен. Беглый разрыв идет на фоне медленного тренда и среднего уровня объемов. Отрывной разрыв сопровождается ажиотажным спросом, а окончательный следует за отрывным, но при резком снижении спроса.

Тенденция (тренд) лучше всего прослеживается по кривой, получающейся путем соединения точек, соответствующих ценам закрытия (рис. 4.2). Как правило, графики не имеют монотонного характера: постепенное понижение или повышение сопровождается небольшими колебаниями. Соединяя точки максимума этих колебаний, строят так называемые линии сопротивления, соединяя минимумы, – линии поддержки (рис.4.4). Естественно, что основной интерес представляет экстраполяция этих кривых на будущее. Приближение курсового графика к одной из этих линий, как правило, свидетельствует о том, что далее произойдет изменение направления.



*Рис. 4.4. Построение линий сопротивления и поддержки*

Однако «пробивание» линий поддержки или сопротивления является сигналом о том, что на рынке произошли существенные изменения, отражающие в свою очередь существенные изменения в финансовом состоянии самой корпорации-эмитента.

Впрочем, как правило, графический анализ применяется не к отдельной корпорации, а для выяснения тенденции рынка в целом или отдельных его секторов (промышленности, транспорта и т.д.).

Количество частных приемов графического анализа огромно. Однако для всех этих приемов характерны отсутствие четких количественных рекомендаций и интуитивный характер предсказаний. Вместе с тем в основе технического подхода лежит здравая и практически полезная идея: наблюдение за ходом кривых, отражающих динамику цен и объемов сделок в прошлом, позволяют прогнозировать поведение цен в будущем, а следовательно, давать рекомендации по вложениям в ценные бумаги.

### **Современный технический анализ**

Современный технический анализ использует то же основное предположение об информативности курсовой динамики, истории ценных бумаг, но оперирует не графиками, а расчетно-аналитическими процедурами, опирающимися на методы статистической обработки временных рядов. Описанные в предыдущих разделах процедуры, в сущности, представляют собой один из вариантов технического анализа, поскольку их основная идея заключается в оценке эффективности вклада, определяемой изменением курса ценных бумаг.

Именно статистическая обработка позволяет оценить не только качественно, но и количественно как ожидаемое значение курсовой цены в будущем, так и амплитуду ее колебаний, выражаемую через среднее квадратическое отклонение. Если эффективность вклада оценивается без учета дивидендов, то цена в будущем равна

$$C_t = C_0(1 + R_t),$$

где  $R$  – случайная эффективность за время  $t$ .

Ожидаемое значение цены равно

$$E \{C_t\} = C_0(1 + m_t),$$

а среднее квадратическое отклонение равно

$$C_0 \sigma_r,$$

где  $m$ ,  $\sigma_r$  – ожидаемое значение и СКО эффективности, которые оценивались по временным рядам.

Однако на практике для принятия решений на рынке ценных бумаг необходимо знание не прогноза цен, а прогноза их изменений, которые и отражают оценки эффективностей.

Одним из недостатком традиционного технического анализа является построение его на основе графиков цен, а не их изменений. Важно, однако, понимать, за какой период времени требуется оценивать изменения.

Обычно рекомендуется проводить оценки изменений за достаточно длительные интервалы времени (например, квартал). При этом подразумевается, что такие изменения статистически устойчивы за весьма длительный период времени (до 10 лет). Однако этот подход применим только для устойчивой, сложившейся рыночной экономики и, более того, для принятия решений, осуществляемых достаточно редко (не чаще, чем раз в квартал).

Если же управление портфелем ценных бумаг ведется более активно, то необходимо прогнозирование на более короткие интервалы времени в будущем. В частности, по отношению к наиболее ликвидным видам ценных бумаг важно оценивать, как изменится их цена уже на следующий день торгов, учитывая всю предысторию вплоть до текущего дня.

Для этого каждая группа аналитиков должна использовать следующие основные процедуры:

1. По скользящей выборке (включающей, например, данные за предшествующие 50-100 дней торгов) производится статистическая оценка ожидаемых изменений курсовых цен впредь на день или несколько дней.

2. Дается оценка вариаций и ковариаций отклонений от этих ожидаемых значений.

3. Строятся кривые прогноза (графики ожидаемых в будущем изменений) и доверительных интервалов, в которые могут уложиться случайные отклонения от прогноза с заданной вероятностью (верхняя и нижняя границы доверительных и интервалов соответствуют традиционным линиям сопротивления и поддержки).

4. По полученным оценкам ожидаемых значений и ковариаций случайных отклонений производится вычисление прогноза оптимальной структуры портфеля ценных бумаг. Поскольку меняются оценки, то изменяется и структура, что дает основание рекомендовать соответствующие изменения в управляемом портфеле путем покупки или продажи ценных бумаг на рынке.

Очевидно, что реализация описанной схемы применительно ко всей совокупности ценных бумаг, фигурирующих на рынке, связана с огромными информационными и вычислительными затратами, которые могут превзойти эффект от улучшения структуры портфеля даже весьма крупного инвестора. Поэтому в реальной практике инвестиционного менеджмента применяются различные упрощающие варианты.

Наиболее распространенной является двухэтапная схема. На первом этапе (security selection) подбираются портфели, включающие ценные бумаги только одного типа, например, только акции венчурных компаний (весьма эффективные, но не слишком надежные), только акции крупнейших компаний с устойчивой репутацией (blut chips на американском жаргоне), только бонды корпораций или только безрисковые ценные бумаги типа векселей казначейства США, почти эквивалентные наличным деньгам. Отбор в каждый специализированный портфель производится на основе опыта менеджера.

На втором этапе (asset allocation) решаются задачи прогнозирования эффективности отобранных портфелей и вычисления оптимальной комбинации из них. Конечно, при этом удастся работать с задачами значительно меньшей размерности.

Иногда используется и более сложная трехэтапная схема. На первом этапе выбираются портфели, в которые включаются, например, только акции одной из отраслей или только бонды с коротким сроком платежа. На втором этапе (group selection) образуются смеси из выбранных портфелей, тоже включающие только акции или бонды, и наконец, на третьем этапе вновь выбирается оптимальное распределение вкладов между акциями, бондами корпораций и безрисковыми ценными бумагами.

Напомним теперь, что теория равновесного рынка предполагает и более простую процедуру: довериться рынку и выбрать свой пакет рискованных ценных бумаг в качестве уменьшенной в размерах, но совпадающей по структуре копии рынка в целом. Следует понимать, что такая рекомендация практически нереализуема: при наличии на рынке более 5000 видов акций различных корпораций, самая мелкая из которых составляет не более 1/1000000 от общей суммы циркулирующих



ценных бумаг, попытка сформировать портфель – копию рынка обойдется в несколько миллиардов долларов (цена стандартного пакета в 100 акций обычно составляет несколько тысяч долларов), и если инвестор обладает подобной суммой, то он может предпочесть более серьезный анализ эффективности формируемого им суперпортфеля.

То, что практика иногда не соответствует простейшим рекомендациям САРМ, ясно из рассмотрения состава портфелей ведущих американских инвестиционных фондов. Эти портфели существенно различаются по составу. Более того, один и тот же фонд может предлагать инвесторам различные, подобранные по разным принципам портфели, каждый из которых, правда, составлен так, чтобы обеспечить достаточно высокую эффективность при разумной степени надежности.

Вновь подчеркнем, что при первом этапе формирования портфеля, на этапе отбора видов ценных бумаг, главную роль играет опыт менеджера, опирающегося не только на данные статистики, но и на информацию, заведомо не отражаемую историей торгов. В частности, огромную роль играют сведения, полученные в результате фундаментального анализа официально публикуемой информации о финансовом состоянии корпораций, и сведения из неофициальной информации (в особенности сведения о намеченном уровне выплаты дивидендов).

В заключение отметим, что за последнее время наметился синтез фундаментального и технического анализа, основанный на их новом понимании. Современный фундаментальный анализ базируется на построении математических моделей развития экономики в целом и отдельных корпораций. В результате этого анализа могут быть даны объективные оценки роста прибылей, а иногда и дивидендной политики. Используемые как априорные данные при статистической обработке временных рядов в рамках технического анализа эти результаты позволяют существенно улучшить чисто «исторические» оценки.

### **Тактика (стиль) менеджмента**

Различные менеджеры придерживаются различной тактики в работе с доверяемыми им фондами.

Пассивная тактика, или пассивный стиль, характеризуется тем, что менеджер ориентируется на пропорции рынка,

доверяет отражаемому рынком «общественному мнению» о реальной стоимости различных ценных бумаг. Аналитик представляет менеджеру информацию о текущей структуре рынка, менеджер (или клиент) в зависимости от предпочтений (и ассигнуемых средств) делает свой выбор, ориентируясь на меньшее число позиций (типов ценных бумаг), или следует рекомендациям, вытекающим из описанных выше многоэтапных процедур, где его предпочтения учтены аналитиком на начальном этапе (security selection).

При этом возможна как чисто пассивная тактика, при которой принятие решения о структуре портфеля не меняется в течение долгого времени, несмотря на текущие колебания структуры рынка, либо тактика (market timing), при котором решение периодически пересматривается, производится коррекция портфеля с учетом колебаний структуры. Обычно подобная коррекция производится лишь на верхнем уровне размещения вкладов, т.е. путем периодического пересмотра долей вкладов в акции, бонды и безрисковые ценные бумаги без изменения структуры каждого портфеля (доли соответствуют долям тех же типов вкладов на текущем рынке или прогнозу этих долей).

Активная тактика характеризуется тем, что менеджер не доверяет общему мнению и считает, что, имея более полную информацию, он может обеспечить более эффективную структуру вкладов. Именно при активной тактике могут быть полностью использованы возможности финансового анализа.

Получив рекомендации аналитиков о структуре оптимального портфеля, менеджер может убедиться, что он не соответствует структуре рынка (или ее усеченному варианту, соответствующему отобранному по вкусу клиента типам ценных бумаг). Тогда он может занять «активную позицию», увеличивая или уменьшая (по сравнению с рынком) вклады в различные ценные бумаги, добиваясь полного или хотя бы частичного соответствия с оптимальным портфелем.

Эти увеличения или уменьшения принято называть bets, что можно перевести как «ставки в игре», поскольку это действительно ставки в стремлении «переиграть рынок», добиться большей выгоды, хотя, возможно, и с большим риском.

И тактика пассивного слежения за рынком (market timing), и тем более активная тактика предусматривают ревизию, пе-

рестройку структуры портфеля путем покупки одних видов ценных бумаг и продажи других.

Достаточно тонким является вопрос, насколько часто следует изменять структуру. Если бы рынок был «безфрикционным», то такие изменения стоило бы производить непрерывно, как только расчеты выявят оптимальный в новых условиях портфель.

Однако в действительности любая операция по перестройке портфеля связана с дополнительными затратами.

При каждой операции приходится платить налоги и комиссионные брокеру.

Более того, продав пакет акций по цене 1000 долл., его нельзя сразу приобрести обратно по той цене, поскольку существует bid-ask spread – разница между ценой покупки и продажи. Таким образом, операция по перестройке портфеля может быть разумной только в том случае, если прирост эффективности перекроет «фрикционные» затраты.

### **Об эффективности работы менеджера и аналитика**

Торговля на финансовом рынке, операции с ценными бумагами, несмотря на все указанные тонкости финансового анализа, все-таки являются одним из видов азартных игр. Степень азарта, роль случайности здесь, конечно, значительно ниже, чем в игре на деньги в покер, рулетку или лотерею, но она всегда присутствует.

Хотя все играющие в рулетку заведомо знают, что «стол» всегда остается в выигрыше, если игра идет длительное время, это не мешает реальному возникновению ситуации, когда неопытный игрок, поставивший деньги на номер, выбранный наугад, вдруг оказывается обладателем целого состояния.

Точно так же и неопытный вкладчик может дешево купить пакет акций никому не известной компании, которые через год станут вдвое дороже, хотя на бирже это случается крайне редко.

Тем не менее практически сложно отделить выигрыш, полученный в силу случайной удачи, от выигрыша, связанного с искусством управления. Для оценки уровня этого искусства, в свою очередь, требуются длительные наблюдения за работой инвестиционного фонда и сравнение итогов этой работы с деятельностью аналогичных предприятий.

Вместе с тем, в последние годы в США и других развитых странах наблюдается все большее предпочтение научных методов финансового анализа с привлечением мощной компьютерной базы по сравнению с применением интуитивной оценки и действий наугад.

#### 4.4. Статистические характеристики пакета ценных бумаг. Влияние корреляции между ценами различных видов акций на итоговую эффективность портфеля

Пусть  $x_j, j=1, \dots, n$  – доля общего вложения, приходящаяся на  $j$ -й вид ценных бумаг, так что

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1. \quad (4.6)$$

Эффективность портфеля  $R_p$ , очевидно, равна

$$R_p = \sum_{j=1}^n R_j x_j, \quad (4.7)$$

если эффективность  $j$ -го вида равна  $R_j$ .

Согласно правилам теории вероятностей ожидаемый эффект от портфеля равен

$$m_p = E(R_p) = \sum_{j=1}^n x_j E(R_j) = \sum_{j=1}^n x_j m_j.$$

Отклонение от ожидаемого значения равно

$$R_p - m_p = \sum_{j=1}^n x_j (R_j - m_j).$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения есть дисперсия эффекта портфеля

$$V_p = E[(R_p - m_p)^2] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j E[(R_i - m_i)(R_j - m_j)] = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j,$$

где величины  $V_{ij} = E[(R_i - m_i)(R_j - m_j)]$  являются ковариациями случайных величин  $R_i$  и  $R_j$ . Очевидно, что

$$V_{jj} = \sigma_j^2,$$

т.е.  $V_{jj}$  являются дисперсиями  $R_j$ .

Предположим сначала, что случайные эффекты от различных видов ценных бумаг, включенных в рассматриваемый портфель, взаимно независимы, точнее, некоррелированы, т.е. формально  $V_{ij} = 0, i \neq j$ .

Тогда

$$V_p = \sum_j x_j^2 \sigma_j^2,$$

а среднее квадратичное отклонение  $\sigma_p$  равно

$$\sigma_p = \sqrt{\sum_j x_j^2 \sigma_j^2}.$$

Именно эта величина характеризует неопределенность, риск, связанный с вложением в портфель ценных бумаг. Зачастую этот риск так и именуют – «риск портфеля».

Допустим, что инвестор вложил свои деньги равными долями во все ценные бумаги. Тогда  $x_j = 1/n$ , и инвестор получит средний ожидаемый эффект

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n m_j,$$

причем риск равен

$$\sigma_p = \left( \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть  $\sigma = \max_j \sigma_j$ .

Тогда

$$\sigma_p \leq \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n \sigma^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} (n \sigma^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma.$$

Вывод: при росте числа видов ценных бумаг  $n$ , включенных в портфель, риск портфеля ограничен и стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ .

Этот результат известен в теории вероятностей как закон больших чисел, а в теории финансового риска – как эффект диверсификации (разнообразия) портфеля.

Отсюда вытекает главное практическое правило финансового рынка: для повышения надежности эффекта от вклада в рискованные ценные бумаги целесообразно делать вложе-

ния не в один вид, а составлять портфель, содержащий возможно большее разнообразие ценных бумаг, эффект от которых случаен, но случайные отклонения независимы.

Практические следствия из этого правила диверсификации, проявляющиеся в самой организации финансового рынка, описаны ниже. Здесь же мы обратим внимание на то, что само это правило получено из предположения о независимости эффектов. Но эта гипотеза вызывает сомнения.

*Пример 1.* Рассмотрим условную ситуацию, когда инвестор может формировать портфель из различных видов ценных бумаг, эффективности которых взаимно некоррелированы. Ожидаемые значения эффективностей и их СКО приведены в таблице

$j$	1	2	3	4	5	6
$m_j$	11	10	9	8	7	6
$\sigma_j$	4	3	1	0.8	0.7	0.7

Если инвестор вложит свой капитал поровну в ценные бумаги только первых двух видов, то ожидаемая эффективность портфеля окажется чуть меньше, чем при покупке только одного вида

$$m_p = \frac{1}{2}(11+10) = 10,5,$$

но зато СКО портфеля окажется меньшим, чем у наименее «рискового» из двух

$$\sigma_p = \frac{1}{2}\sqrt{4^2 + 3^2} = 2,5.$$

В следующей таблице показаны ожидаемые эффективности и СКО портфелей, составленных поровну из первых двух, трех и т. д. ценных бумаг, с характеристиками из 1-й таблицы

$n$	2	3	4	5	6
$m_p$	10.5	10	9.5	9	8.5
$\sigma_p$	2.5	1.7	1.23	1.04	0.87

Ясно, что диверсификация позволила снизить риск почти втрое при потере ожидаемой эффективности всего на 20%.

Мы живем в мире, где все взаимосвязано. Процент на вложения возникает не произвольно, а является отражением деловой активности компании, выпустившей ценные бумаги. Если деятельность компании дает высокую прибыль, то и акционер, являющийся номинальным совладельцем компании, получит большой доход. Если же прибыль окажется низкой или деятельность компании вообще окажется нерентабельной, то дивиденды выплачиваться не будут.

Более того, если информация о плохом состоянии дел компании окажется известной широкой публике (а это неизбежно), то цена акций на бирже резко снизится и эффект  $r$  будет отрицательным. Вместе с тем, повторяем, в экономике все взаимосвязано: например, при снижении деятельности автомобилестроительных фирм они уменьшат закупки металла у металлургов, шин – у поставителей соответствующей отрасли промышленности и т.д.

Рассмотрим теперь формально, как отражается корреляция на эффективности портфеля ценных бумаг. Очевидно, что она не влияет на ожидаемую эффективность, однако дисперсия портфеля равна

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j V_{ij}.$$

Удобно ввести в рассмотрение величины

$\rho_{ij} = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} V_{ij}$ , называемые коэффициентами корреляции. Тогда

$$V_p = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\sigma_i x_i)(\sigma_j x_j) \rho_{ij}.$$

Для того, чтобы понять влияние корреляции, достаточно рассмотреть простейшие случаи. Пусть, например, все  $\rho_{ij} = 1$  (случай прямой корреляции). Тогда

$$V_p = \left( \sum_i \sigma_i x_i \right)^2.$$

Попробуем произвести простую диверсификацию, вло-

жив деньги в равных долях,  $x_i = 1/n$ .

$$V_p = \left( \frac{1}{n} \sum_i \sigma_i \right)^2, \quad \sigma_p = \frac{1}{n} \sum_i \sigma_i.$$

Если  $\sigma = \max_i \sigma_i, \underline{\sigma} = \min_i \sigma_i$ , то при всех  $n$

$$\underline{\sigma} \leq \sigma_p \leq \sigma.$$

При полной корреляции диверсификация не дает положительного эффекта: риск портфеля оказывается просто равен среднему риску от отдельных вложений и не стремится к нулю с увеличением числа видов ценных бумаг.

Положительная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг имеет место, когда курс обеих определяется одним и тем же внешним фактором, причем изменение этого фактора действует в одну и ту же сторону. Например, пусть изменение курсовой цены акций электроэнергетической и транспортной компаний  $\Delta C_э$  и  $\Delta C_т$  пропорционально изменению цен на нефть  $\Delta C_н$ :

$$\Delta C_э = 0.6 \Delta C_н, \quad \Delta C_т = 0.3 \Delta C_н.$$

Тогда эффективности игры на курсах этих акций пропорциональны:

$$r_э = \frac{\Delta C_э}{C_{э0}} = 2 \frac{C_{т0}}{C_{э0}} r_т,$$

где  $C_{э0}, C_{т0}$  – начальные цены акций. Цены на нефть меняются произвольно, непрогнозируемо, но при этом эффективности курсов обоих видов акций всегда меняются в одну и ту же сторону.

Диверсификация путем покупки и того, и другого вида бесполезна: эффективность портфеля окажется столь же случайной, сколь случайна цена нефти.

Теперь рассмотрим ситуацию полной обратной корреляции, когда  $\rho_{ij} = -1, i \neq j$ . Для понимания сути дела достаточно проанализировать портфель, состоящий из 2 типов ценных бумаг.

$$V_p = (\sigma_1 x_1 - \sigma_2 x_2)^2.$$



Если  $x_2 = \sigma_1 x_1 / \sigma_2$ , то  $V_p = 0$ .

*Пример 2.* Пусть эффективности двух ценных бумаг, имеющих одинаковую стоимость, находятся в полной обратной корреляции. СКО эффективности первой из них равно 2.0, СКО второй равно 3.0.

Тогда безрисковым окажется портфель, в котором на каждые три ценные бумаги 1-го вида приходится две 2-го вида.

Мы можем сделать интересный вывод: при полной обратной корреляции возможно такое распределение вложений между различными видами ценных бумаг, что риск полностью отсутствует.

Полная обратная корреляция между эффективностями двух ценных бумаг – достаточно редкое явление.

Однако мы уже приводили условный пример такого рода: возможные изменения эффективности кредитования под залог, вызванные случайным возникновением пожара, полностью компенсировались выплатами по страховому полису.

Наиболее реальными являются ситуации, когда нет ни полной прямой, ни полной обратной корреляции, но разумная диверсификация приводит к снижению риска без потери ожидаемой эффективности.

#### **4.5. Оптимизация портфеля ценных бумаг. Постановка и решение классической задачи оптимизации методом неопределенных множителей Лагранжа**

Любой вид рисковых ценных бумаг характеризуется двумя величинами: ожидаемой эффективностью и мерой риска – вариацией, или среднеквадратичным отклонением эффективности от ожидаемой. Эти же величины можно вычислить для любого портфеля ценных бумаг, если известны ковариации между эффективностями.

Естественно, что и ожидаемая эффективность, и вариация портфеля будут зависеть от его структуры, т.е. доли исходного капитала, вложенной в каждый вид ценных бумаг. Инвестор всегда сталкивается с дилеммой: желание иметь наибольшую эффективность портфеля и желание обеспечить вложение с наименьшим риском. Поскольку «нельзя поймать двух зай-

цев сразу», необходимо сделать определенный выбор, который зависит от характера самого инвестора и от его склонности к риску. Однако разумный инвестор должен быть уверен, что, определив в качестве цели достижение наибольшей ожидаемой эффективности, он выберет такую структуру, которая поможет добиться этого с наименьшим риском.

Пусть, как и ранее,  $x_j$  – доля капитала, вложенного в ценные бумаги  $j$ -го вида. Тогда можно свести задачу выбора оптимальной структуры портфеля к следующей математической проблеме, формализованной впервые Г.Марковицем (H. Markovitz) в 1951 г., за что позднее он был удостоен Нобелевской премии по экономике.

Найти  $x_j$ , минимизирующие вариацию эффективности портфеля

$$V_p = \sum_i \sum_j V_{ij} x_i x_j,$$

при условии, что обеспечивается заданное значение  $m_p$  ожидаемой эффективности, т. е.

$$\sum_j m_j x_j = m_p, \text{ при } \sum_j x_j = 1.$$

Решение этой задачи обозначим знаком \*. Если  $x_j^* > 0$ , то это означает рекомендацию вложить долю  $x_j^*$  наличного капитала в ценные бумаги вида  $j$ . Если  $x_j^* < 0$ , то это означает рекомендацию взять в долг ценные бумаги этого вида в количестве —  $x_j^*$  (на единицу наличного капитала), т.е. участвовать в операции типа short sale. Если таковые невозможны, то приходится вводить дополнительное требование:  $x_j$  не должны быть отрицательными.

Решение задачи численными методами не представляет трудностей.

Американский экономист Д.Тобин заметил, что решение задачи резко упрощается и приобретает новые особенности, если учесть простой факт: кроме рискованных ценных бумаг на рынке имеются и безрисковые (или почти безрисковые) типа государственных обязательств с фиксированным доходом.

Поэтому и на практике, и в теории главная задача – правильное распределение капитала между безрисковыми и рисковыми вложениями

Пусть  $r_0$  – эффективность безрискового вложения, а ожидаемая эффективность какого-либо портфеля рискованных ценных бумаг равна  $m_r$  (и она, конечно, выше  $r_0$ ). Известна также вариация  $V_r$  эффективности этого портфеля.

Неизвестна доля  $x_0$  капитала, которую надо вложить в безрисковые ценные бумаги.

Эффективность комбинированного вклада объединенного портфеля ( $x_0$  – в безрисковые,  $1 - x_0$  – в рискованные) является случайной:

$$R_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) R_r,$$

Ожидаемое значение равно

$$m_p = x_0 r_0 + (1 - x_0) m_r = m_r + x_0 (r_0 - m_r),$$

а вариация определяется только рискованной частью вклада и равна

$$V_p = (1 - x_0)^2 V_r.$$

Среднеквадратичное отклонение:  $\sigma_p = (1 - x_0) \sigma_r$ .

Исключая  $x_0$ , получим

$$m_p - r_0 = \frac{m_r - r_0}{\sigma_r} \sigma_p,$$

т.е. связь между ожидаемым значением и СКО эффективности всего вклада линейна (рис. 4.5).

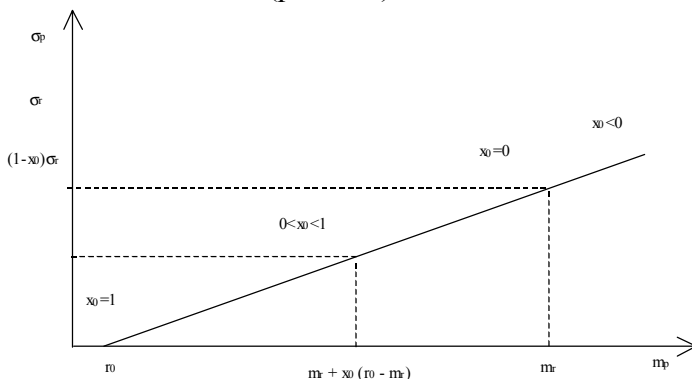


Рис. 4.5. Связь между ожидаемым значением и СКО эффективности всего вклада

Если весь капитал инвестируется в безрисковые ценные бумаги, то эффективность равна  $r_0$ , а риск равен нулю; если весь наличный капитал вложить в рискованные ценные бумаги, то ожидаемая эффективность равна  $m_p$ , а СКО равно  $\sigma_p$ . Любому же промежуточному решению ( $0 < x_0 < 1$ ) соответствует одна из точек на отрезке прямой, связывающей предельные, простые решения. Однако если возможно брать безрисковые ценные бумаги в долг ( $x_0 < 0$ ), то достижима и любая ожидаемая эффективность, сопровождаемая соответственно растущим риском. Теория лишь указывает, каковы будут последствия решения инвестора.

Главный вывод, сделанный Тобиным: если имеется возможность выбирать не только между заданным рискованным портфелем и безрисковыми ценными бумагами, но и одновременно выбирать структуру рискованного портфеля, то оптимальной окажется только одна такая структура, не зависящая от склонности инвестора к риску.

Задача оптимизации портфеля ценных бумаг допускает явное решение, только если отсутствуют ограничения неотрицательности переменных. Построим его с помощью метода множителей Лагранжа. Предварительно перепишем постановку задачи в матричной форме:

$$V_p = x^T V_x; m^T x = m_p; I^T x = 1,$$

вводя обозначения для  $(n \times n)$  — матрицы ковариаций  $V = [V_{ij}]$ , матрицы-столбца ожидаемых эффективностей  $m = (m_j)$ , единичной матрицы-столбца  $I = (1)$ , а также матрицы-столбца неизвестных долей  $x = (x_j)$ . Знаком «Т» обозначена операция транспонирования. Согласно этим обозначениям задача оптимизации структуры портфеля принимает вид: минимизировать

$$V_p = x^T V_x; \quad (4.8)$$

при двух ограничивающих условиях

$$m^T x = m_p; I^T x = 1, \quad (4.9)$$

причем  $m_p$  является произвольной фиксированной величиной, а матрицы  $V$ ,  $m$  заданы. Введем функцию Лагранжа:

$$L = x^T V x + \lambda_0 (I^T x - 1) + \lambda_1 (m^T x - m_p).$$

Решение поставленной задачи на условный экстремум должно удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0;$$

что эквивалентно уравнению

$$2 V x = - \lambda_0 I - \lambda_1 m,$$

откуда получаем, что

$$x = -(\lambda_0 / 2) V^{-1} I - (\lambda_1 / 2) V^{-1} m \quad (4.10)$$

Подставляя (4.10) в (4.9), приходим к двум уравнениям относительно множителей  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$ :

$$(-\lambda_0 / 2) I^T V^{-1} I - (\lambda_1 / 2) I^T V^{-1} m = 1,$$

$$(-\lambda_0 / 2) m^T V^{-1} I - (\lambda_1 / 2) m^T V^{-1} m = m_p.$$

Решив систему и подставив найденные значения  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$  в (4.10), находим явное представление для оптимальной структуры портфеля:

$$x = x^* = V^{-1} [m_p (I J_{12} - m J_1) + m J_{12} - I J_2] / (J_{12}^2 - J_1 J_2)$$

где  $J_1 = I^T V^{-1} I$ ;  $J_2 = m^T V^{-1} m$ ;  $J_{12} = I^T V^{-1} m$ .

Решение линейно относительно  $m_p$ . Отсюда следует, что  $V_p^* = x^{*T} V x^*$  является выпуклой вниз функцией  $m_p$ , и это же верно для СКО  $\sigma_p^*$ .

Если на переменные  $x$  наложено условие неотрицательности, то исходная задача превращается в проблему квадратичного программирования, для решения которой разработаны специальные вычислительные методы.

Представление о свойствах решения можно получить с помощью обобщенного метода Лагранжа, вводя дополнительные множители  $\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, n)$ , соответствующие каждому неравенству  $x_j \geq 0$ .

Решение, выраженное через эти множители, представлено в виде

$$x^* = V^{-1} \{ C^T (C V^{-1} C^T)^{-1} [d + (1/2) C V^{-1} \mu] - \mu \},$$

где введены обозначения для постоянных матриц

$$d^T = \{1, m_p\}, C^T = \{I^T, m^T\},$$

а множители  $\mu$  и  $x^*$  удовлетворяют условиям вида

$$\mu_j x_j^* = 0; \mu_j \geq 0; x_j^* \geq 0, \quad (4.11)$$

т.е. либо  $\mu_j = 0$ , либо  $x_j^* = 0$ . При изменении  $m_p$  изменяется число переменных  $x_j^*$ , равных нулю, но остальные переменные определяются из линейной системы уравнений, в которую  $m_p$  входят линейно. Это свойство влечет за собой кусочно-линейный характер зависимостей  $x^*(m_p)$  в любом диапазоне изменения  $m_p$ .

Рассмотрим далее задачу оптимизации при возможности безрисковых вложений. Обозначая через  $x_0$  долю таких вложений с гарантированной эффективностью  $r_0$ , приходим к проблеме:

$$\min \{x^T V x / m^T x + r_0 x_0 = m_p, I^T x + x_0 = 1\}. \quad (4.12)$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L = x^T V x + \lambda_0 (I^T x + x_0 - 1) + \lambda_1 (m^T x + r_0 x_0 - m_p).$$

Условия минимума таковы

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0; \frac{\partial L}{\partial x_0} = 0,$$

что приводит к системе линейных уравнений

$$2 Vx + \lambda_0 I + \lambda_1 m = 0; \lambda_0 + \lambda_1 r_0 = 0,$$

откуда

$$\lambda_0 = -\lambda_1 r_0; x = V^{-1}(I r_0 - m) (\lambda_1 / 2). \quad (4.13)$$

С другой стороны, исключая  $x_0$  из ограничений задачи, получаем

$$1 - I^T x = (1 / r_0) (m_p - m^T x),$$

или

$$(m - r_0 I)^T x = m_p - r_0.$$

Подстановка сюда  $x$  из (4.1) дает уравнение для  $\lambda_1$ , из которого этот множитель определяется в явном виде:

$$\lambda_1 = -2 (m_p - r_0) / [(m - r_0 I)^T V^{-1} (m - r_0 I)],$$

что в свою очередь позволяет преобразовать (4.13) в явное выражение решения

$$x = x^* = V^{-1} (m - r_0 I) (m_p - r_0) / [(m - r_0 I)^T V^{-1} (m - r_0 I)].$$

Существенно, что величина  $m_p$  входит только в скалярный множитель при  $x^*$ . Следовательно, структура рисков вложений не зависит от  $m_p$ :

$$\frac{x^*}{\sum_{j=1}^n x_j^*} = \frac{V^{-1} (m - r_0 I)}{I^T V^{-1} (m - r_0 I)}.$$

Минимальная вариация вычисляется по определению

$$V_p^* = x^{*T} V x^* = (m_p - r_0)^2 g^2.$$

где  $g^2 = (m - r_0 I)^T V^{-1} (m - r_0 I)$ .

Отсюда следует линейность связи между ожидаемой эффективностью оптимального портфеля и ее СКО:

$$\sigma_p^* = g^{-1}(m_p - r_0) \quad (4.14)$$

или

$$m_p = r_0 + g \sigma_p^* \quad (4.15)$$

При  $x_0 = 0$  оптимальный портфель состоит только из рискованных ценных бумаг, а следовательно, должен быть оптимальным также и среди возможных вариантов только рискованных ценных бумаг. Однако минимальные вариации всех портфелей, содержащих только рискованные ценные бумаги, для различных соответствующих им ожидаемым эффективностям даются решением задачи Марковица (4.6), (4.7). Таким образом, точка на прямой (4.15), соответствующая  $x_0 = 0$ , должна лежать и на кривой  $\sigma_p^*(m_p)$ . Более того, это единственная общая точка этих прямой и кривой в силу единственности оптимального портфеля рискованных ценных бумаг. Поэтому прямая (4.15) должна касаться кривой  $\sigma_p^*(m_p)$  в этой точке (рис. 4.6).

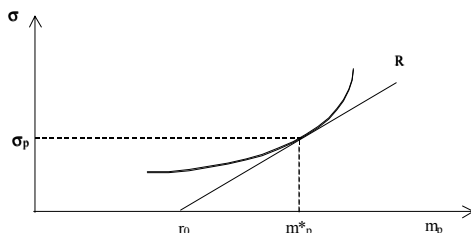


Рис. 4.6. Графическая иллюстрация решения задачи Марковица

Пусть сначала сделан наилучший выбор только среди всех рискованных ценных бумаг. В зависимости от склонности к риску инвестор выберет одну из точек на кривой  $R$ . После этого возникает возможность вклада и в рискованные, и в безрисковые ценные бумаги.

Проведя касательную к кривой  $R$  из точки  $m_p = r_0$ ,  $\sigma_p = 0$ , найдем точку с координатами  $m_p^*$ ,  $\sigma_p^*$ , дающими характеристики оптимального рискованного портфеля. Все другие точки на касательной представляют характеристики оптимального комбинированного (из рискованных и безрисковых ценных бумаг) портфеля, и пропорция  $x_0$  в этой комбинации должна определяться самим инвестором.



Теми же свойствами обладает решение задачи Тобина (4.12) при введении дополнительных ограничений неотрицательности переменных. Решение может быть представлено в виде:

$$x^* = (m_p - r_0) g^{-2} V^{-1} (m - r_0 I) + (1/2) V^{-1} [(m - r_0 I) (m - r_0 I)^T V^{-1} g^{-2} - 1] \mu,$$

где  $\mu = (\mu_j, j=1, \dots, n)$  — множители, удовлетворяющие совместно с компонентами  $x^*$  условиям дополняющей нежесткости (4.11). Ненулевые множители определяются совместно с ненулевыми компонентами  $x^*$  из линейной системы уравнений, правая часть которой пропорциональна  $m_p - r_0$ .

Отсюда вытекает, что  $x^*$  пропорционально  $m_p - r_0$ , а следовательно, структура рискованных вложений не должна зависеть от этого скалярного множителя.

Хотя гипотеза Тобина о возможности чисто безрисковых вложений практически некорректна, но можно доказать, что при наличии слаборисковых вложений решение задачи Марковица оказывается близким к решению задачи, построенной с учетом пренебрежения слабым риском. Тем самым структура сильнорисковых вложений окажется почти не зависящей от склонности инвестора к риску.

Дадим оценку вклада каждой ценной бумаги, вошедшей в оптимальный портфель, в общую ожидаемую эффективность.

Эффективность оптимального портфеля есть случайная величина, равная

$$R_p^* = r_0 x_0 + \sum_{j=1}^n R_j x_j^* = r_0 x_0 + R^T x^*,$$

где  $R$  — случайная эффективность  $j$ -й рискованной ценной бумаги.

Отсюда находим, что

$$R_p^* - m_p^* = r_0 x_0 - m_p^* + R^T x^* = (R - m)^T x^*, \quad (4.16)$$

где учтено условие  $m_p = r_0 x_0 + m^T x^*$ .

Вычислим величины  $\beta_j^*$  именуемые «бета вклада  $j$  относительно оптимального портфеля», которые по определению равны:

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ  
<http://учебники.информ2000.рф/napisat-diplom.shtml>

$$\beta_j^* = (1 / V_p^*) \text{CoV}\{R_j, R_p^*\} = (1 / V_p^*) E\{(R_j - m_j)(R_p^* - m_p)\}.$$

В силу (3.9) вектор  $\beta^*$  с компонентами  $\beta_j^*$  дается формулой

$$\beta^* = (1 / V_p^*) E\{(R - m)(R_p^* - m_p)\} = (1 / V_p^*) E\{(R - m)(R - m)^T x^*\}.$$

Вспоминая смысл элементов матрицы ковариаций  $V$ , нетрудно убедиться, что

$$V = E\{(R - m)(R - m)^T\},$$

откуда следует выражение

$$\beta^* = (1 / V_p^*) V x^*,$$

или

$$\beta^* = (m - r_0 I) / (m_p - r_0).$$

Обычно это соотношение записывается в виде

$$m - r_0 I = \beta^* (m_p - r_0),$$

или в скалярной форме

$$m_j - r_0 = \beta_j^* (m_p - r_0), j = 1, \dots, n.$$

Превышение ожидаемой эффективности какой-либо рисковой ценной бумаги или портфеля рискованных ценных бумаг над эффективностью безрискового вклада именуется премией за риск. Теория позволяет сделать важный вывод: премия за риск любой ценной бумаги, включенной в оптимальный портфель, пропорциональна премии за риск, связанной с портфелем в целом.

Ясно, что чем больше бета данной ценной бумаги, тем выше доля общего риска, связанная с вложением именно в эту ценную бумагу. Вместе с тем, чем больше бета, тем выше и премия за риск.

#### **4.6. Методы оценки риска портфеля ценных бумаг в рамках классического теоретико-вероятностного подхода к формализации неопределенностей**

Весьма распространенная точка зрения, что вариация эффективности (или СКО) является разумной мерой риска, не является бесспорной.

Для наглядности рассмотрим пример об эмигранте *A*, включившемся в биржевую игру. Он, имея свои 10 тыс. долл., взял в долг еще 40 тыс. долл. под 10% годовых и вложил все 50 тыс. долл. в акции одной из компаний, рассчитывая на рост курса в 20%. Фактически же курс упал на 40%, и потеря 24 тыс. долл. привела его к полному разорению. *A* пользовался информацией, полученной от знакомого американца, который также вложил 50 тыс. долл. в акции той же компании. На первый взгляд, мера риска у обоих вкладчиков была совершенно одинаковой: они покупали одни и те же акции и на одну и ту же сумму.

Однако американец после продажи акций вернул 30 тыс. долл., потеряв всего 20 тыс. долл. Это чуть меньше, чем у *A*, но, главное, он избежал разорения.

Вывод: если под риском понимать риск разорения, то таковой определяется не только колебаниями курса, но и исходным капиталом.

Рассмотрим другую ситуацию. Ожидаемая эффективность двух видов акций одинакова, однако действительная эффективность зависит от случайных обстоятельств.

Предположим, что на рынке могут возникнуть только две ситуации: ситуация «а» с вероятностью 0,2 и ситуация «б» с вероятностью 0,8.

Различные акции реагируют на эти ситуации по-разному: курс акций 1-го вида в ситуации «а» вырастает на 5%, в ситуации «б» – на 1,25%; соответственные величины для акций 2-го вида – 1,0% и 2,75% (рис. 4.7).

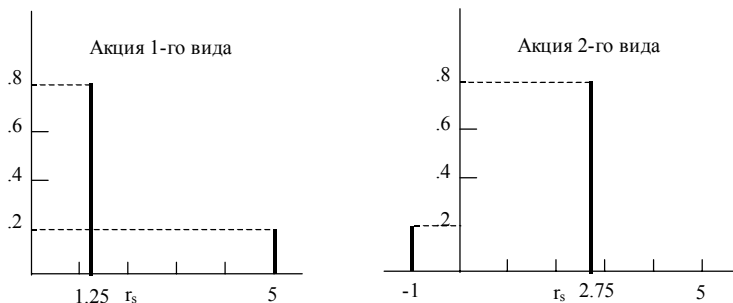


Рис. 4.7. Графическая иллюстрация сравнительной оценки эффективности акций

Ожидаемые эффективности совпадают:

$$m_1 = 5 \cdot 0,2 + 1,250 \cdot 0,8 = 2, \quad m_2 = -1,0 \cdot 0,2 + 2,75 \cdot 0,8 = 2,0$$

Дисперсии также совпадают:

$$V_1 = (5 - 2)^2 \cdot 0,2 + (1,25 - 2)^2 \cdot 0,8 = 2,25,$$

$$V_2 = (-1 - 2)^2 \cdot 0,2 + (2,75 - 2)^2 \cdot 0,8 = 2,25.$$

Предположим теперь, что инвестор взял деньги в долг под процент, равный 1,5. Он ниже ожидаемой эффективности, поэтому эти действия разумны. Однако если инвестор вложил деньги в акции 1-го вида и произошла ситуация «а», то он выиграл 3,5%, а если вложил в акции 2-го вида, то разорился. Напротив, если произошла ситуация «б» и деньги вложены в акции 1-го вида, то инвестор разорен, а при вкладе денег в акции 2-го вида он будет в выигрыше. Поскольку ситуации имеют разную вероятность, то мы видим, что решения инвестора не равнозначны с точки зрения риска разорения: при вкладе в акции 1-го вида он разоряется с вероятностью 0,8, а при вкладе в акции 2-го вида – с вероятностью 0,2.

Таким образом, при равенстве ожидаемых значений, дисперсий и начального капитала риск разорения может быть различным!

Это обстоятельство следует понимать и практически учитывать, хотя в дальнейшем мы будем придерживаться стандартного употребления терминов, ассоциируя риск только с дисперсией.

Для этого существуют серьезные основания. Задание дисперсии, конечно, не полностью характеризует риск, но оно позволяет произвести оценку риска и четко выявить предельные шансы инвестора. Теоретическая база для этого приведена в знаменитом неравенстве Чебышева: вероятность того, что случайная величина отклоняется от своего математического ожидания больше, чем на заданный допуск  $s$ , не превосходит ее дисперсии, деленной на  $s^2$ .

Применительно к случайной эффективности  $R_j$  можно записать:

$$\text{Вер} \{ |R_j - m_j| > \delta \} \leq V_j / \delta^2.$$

Предположим, что инвестиция делается за счет займа, взятого под процент  $r_s$  под залог недвижимости. Какова вероятность того, что инвестор не сможет вернуть долг и лишится своей недвижимости? Это вероятность события, что

$$R_j < r_s$$

или

$$-(R_j - m_j) > m_j - r_s,$$

так что

$$\text{Вер} \{ R_j < r_s \} = \text{Вер} \{ -(R_j - m_j) > m_j - r_s \} \leq \text{Вер} \{ |R_j - m_j| > m_j - r_s \} \leq V_j / (m_j - r_s)^2.$$

Таким образом, шанс разориться не превосходит полученной величины. Конечно, при этом предполагается обязательное выполнение условия разумности такого вклада «под кредит»,  $m_j > r_s$ , и, конечно, оценка имеет смысл, только если дисперсия не слишком велика:  $V_j \leq (m_j - r_s)^2$ .

Для того, чтобы шанс разориться был не более одного из девяти, достаточно выполнить условие

$$V_j \leq (m_j - r_s)^2 / 9$$

или

$$m_j \geq r_s + 3 \sigma_j$$

(правило «3 сигма»).

Рассмотрим другую ситуацию, когда инвестор вкладывает в акции лишь часть своего капитала, оставляя остальное на сбережения под процент, выплачиваемый ему. Оценим вероятность разорения.

Если  $W^0$  – начальный капитал,  $x_0 W^0$  – остающаяся на сбережении часть, то разорение возможно, если

$$x_0 W^0 (1 + r_0) + (1 - x_0) W^0 (1 + R_j) < 0$$

или

$$R_j < -(1 + x_0 r_0) / (1 - x_0).$$

Оценка по Чебышеву дает шанс разорения меньше, чем 1/9, если:

$$\sigma_j (m_j + (1 + x_0 r_0) / (1 - x_0))^2 < 1/3$$

или

$$m_j > -(1 + x_0 r_0) / (1 - x_0) + 3 \sigma_j.$$

Ясно, что игра на свой капитал значительно безопаснее. Даже если вложить весь капитал, то достаточно выполнить условие

$$m_j + 1 > 3 \sigma_j,$$

конечно, если вкладчика устраивает уровень гарантии.

Подчеркнем, однако, что оценка Чебышева, как правило, предусматривает большой запас. Например, если заведомо известно, что колебания в обе стороны от  $m_j$  равновероятны, то оценки шансов на разорение уменьшатся почти в 5 раз: вместо 1 случая из 9 гарантируется, что разорение произойдет не чаще чем в 1 случае из 40.

Вероятность разорения также не является абсолютно объективной мерой риска. В литературе описываются и другие разумные меры. В частности, популярны величины типа ожидаемого значения превышения потерь над располагаемым капиталом.

Возможно, наиболее общий подход к оценке меры риска заключается во введении функции полезности. Концепция функции полезности является важнейшим элементом любой экономической теории. Как известно, введение такой функции позволяет соизмерить потребительский эффект различных товаров, вообще говоря, физически несоизмеримых (например эффект от покупки одного плаща и одного торта). Соизмерение ценных бумаг, которые также являются товаром, на первый взгляд, проще, поскольку все они имеют денежную оценку. Однако рискованные ценные бумаги – это документы, удостоверяющие возможность получения денег в будущем, и тут соизмеримость невозможна: нельзя сказать, какая из случайных эффективностей больше или меньше, а следовательно, нельзя сказать, какая из ценных бумаг или какой портфель ценных бумаг предпочтительнее. Установление любой меры риска является попыткой преодолеть это противоречие, характеризуя случайную величину одним числом.

В общей теории риска принято вводить такие числа  $M$  с помощью соотношения

$$M = E \{V(R)\},$$

где  $V$ - та или иная функция, называемая функцией полезности. Если  $V(R) = R$ , то

$$M = m_R$$

т.е. случайность характеризуется только ожидаемым значением. Если же

$$V(R) = R - A(R - m_R)^2, \quad (4.17)$$

где  $A$  – заданное число, то

$$M = m_R - A V(R), \quad (4.18)$$

т.е. такая мера случайной величины учитывает и ожидаемое значение, и вариацию.

Вероятность неразорения при начальном капитале  $W^0$  также может быть введена с помощью специальной функции полезности

$$v(R) = \begin{cases} 1, & \text{если } R + W^0 > 0, \\ 0, & \text{если } R + W^0 < 0. \end{cases}$$

Таким образом, применяя различные функции полезности, можно описать любые варианты оценки случайной ситуации в виде ожидаемого значения такой функции. Естественно, что любые подходы такого рода субъективны, однако без них не обойтись, если пытаться ввести некоторую единую меру.

В частности, в теории рынка ценных бумаг широко используется квадратичная функция вида (4.17). Ее интерпретация очень проста: инвестор считает полезным для себя увеличить значение эффективности, но избегает отклонения этой эффективности от ожидаемого значения. Чем больше  $A$ , тем тенденция избежания риска, связанного со случайностью, проявляется больше. Таким образом, величину  $A$  можно считать числовой мерой тенденции инвестора избегать риск, а обратную ей – числовой мерой его склонности к риску. Естественно, что величина  $A$  индивидуальна для каждого инвестора, но в принципе ее можно оценить, наблюдая, в частности, за тем, как инвестор делит свой портфель ценных бумаг на рисковую и безрисковую части.

С чисто формальной точки зрения принятие ожидаемой функции полезности вида (4.18) в качестве критерия выбора решения – это просто попытка совместить два критерия: ожидаемое значение и вариацию.

#### **4.7. Методы оптимизации портфеля ценных бумаг в условиях нестатистической неопределенности на основе нечетко-интервальной математики**

Математическая формулировка задачи оптимизации портфеля ценных бумаг в нечетко-интервальной постановке внешне выглядит так же, как в случае классического теоретико-вероятностного подхода к формализации неопределенностей:

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.19)$$

$$\bar{f}(X) = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i x_i \rightarrow \max, \quad (4.20)$$

где  $x_i$  – доля акций  $i$ -го типа в портфеле (обычные четкие числа);  $\bar{R}_i$  – финансовый эффект инвестирования в акции  $i$ -го типа,



представляющий собой нечеткий интервал, вообще говоря произвольной формы. Последний может быть получен на основе опроса экспертов, с помощью описанной выше методики трансформации произвольных частотных распределений в нечеткие интервалы или с помощью сочетания этих подходов;  $\bar{f}(X)$  – совокупный доход портфеля, представляющий собой нечеткий интервал.

Представим  $\bar{R}_i$  в виде разложения на  $\alpha$ -уровни

$$\bar{R}_i = \bigcup_{\alpha} [R_{\alpha}^-, R_{\alpha}^+]_i, \quad (4.21)$$

где  $R_{\alpha}^-$ ,  $R_{\alpha}^+$  – левая и правая границы соответствующих  $\alpha$ -уровней четких интервалов.

Для совокупного дохода портфеля получаем, соответственно

$$\bar{f}(X) = \bigcup [f_{\alpha}^-(X), f_{\alpha}^+(X)], \quad (4.22)$$

где  $f_{\alpha}^-(\bar{X})$ ,  $f_{\alpha}^+(\bar{X})$  — левая и правая границы интервала, соответствующего  $\alpha$ -уровню целевой нечетко-интервальной функции  $\bar{f}(\bar{X})$ .

Подставляя (4.21), (4.22) в (4.20) получает две достаточные простые задачи линейного программирования, решения которых могут быть получены с помощью любого из многочисленных пакетов прикладных программ.

$$f_{\alpha}^-(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n R_{\alpha i}^- x_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (4.23)$$

$$f_{\alpha}^+(\bar{X}) = \sum_{i=1}^n R_{\alpha i}^+ x_i \rightarrow \max, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad (4.24)$$

где  $\alpha = 1, \dots, m$ ;  $m$  – число используемых  $\alpha$ -уровней.

Решения можно формально представить в виде:

$$\{x_i\}_{op}^- = \arg \max_X f_{\alpha}^-(\{x_i\}), \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad \{x_i\}_{op}^+ = \arg \max_{\bar{X}} f_{\alpha}^+(\{x_i\}), \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Подставляя их в (4.23), (4.24) получаем интервалы, в которых может находиться оптимальный доход для каждого

а-уровня  $[f_{op}^-, f_{op}^+]_{\alpha}$  и соответствующие интервалы решений

$$[x_{iop}^-, x_{iop}^+]_{\alpha} \quad i = 1, \dots, n.$$

В итоге приходим к некоторому интервальному решению. Ясно, что это не удовлетворяет практических потребностей, поскольку инвесторы всегда желают знать четкие, а не интервальные значения  $x_i$ .

Поэтому продолжим наши рассуждения.

Построим нечеткий интервал на основе четких интервалов  $[f_{op}^-, f_{op}^+]_{\alpha}$  (рис. 4.8).

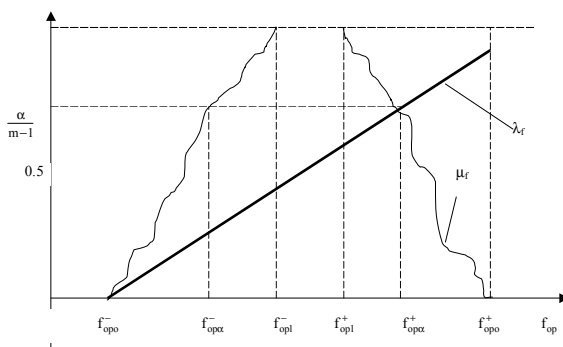


Рис. 4.8. Построение нечеткого интервала допустимых значений дохода и функции желательности дохода

Соответствующую функцию принадлежности представим в виде:

$$\mu_f(f_{op}) = \begin{cases} 0, & f_{op} < f_{opo}^-, \quad f_{op} > f_{opo}^+ \\ 1, & f_{op1}^- < f_{op} < f_{op1}^+ \\ \frac{\alpha}{m-1}, & f_{opo}^- \leq f_{op} \leq f_{op1}^-, \quad f_{op1}^+ \leq f_{op} \leq f_{opo}^+ \end{cases}$$

Способ формализации  $\mu_f$  отражен непосредственно на рис.4.8.

Очевидно, что граничные значения  $f_{opo}^-$ ,  $f_{opo}^+$  определяют область достижимых оптимальных решений, а значения  $\mu_f$  – степени возможности их реализации при исходной неопределенности  $\bar{R}_i$ . Зная  $f_{opo}^-$ ,  $f_{opo}^+$  можно построить реалистическую функцию желательности дохода  $\lambda_f$  на этом базисе (рис. 4.8).

Получим двухкритериальную задачу с точки зрения желательности максимизации дохода (частный критерий  $\lambda_f$ ) при учете осуществимости этого желания ( $\mu_f$ ).

Обобщенный критерий можно представить разными способами:

$$D_1(f) = \min(\mu_f^{\beta_1}(f), \lambda_f^{\beta_2}(f))$$

$$D_2(f) = \beta_1 \mu_f(f) + \beta_2 \lambda_f(f),$$

$$D_3(f) = \mu_f^{\beta_1}(f) \cdot \lambda_f^{\beta_2}(f),$$

$\beta_1$ ,  $\beta_2$  – ранги частных критериев.

Очевидно на основе одного из способов свертки частных критериев в обобщенный, можно найти решение соответствующей задачи оптимизации:

$$\bar{f}_{op,k} = \arg \max_f D_k(f), \quad k = 1, 2, 3.$$

Далее определяется (приближенно), какому  $\alpha$ -уровню соответствует найденное решение  $\bar{f}_{op,k}$ . (Речь идет об  $\alpha$ -уровнях исходного интервала с функцией принадлежности  $\mu_f(f)$ .) Таким образом находим некоторый  $\bar{\alpha}_{op}$ , приближенно соответствующий  $\bar{f}_{op,k}$ .

Для этого  $\bar{\alpha}_{op}$  решаем заново задачу (4.24) и получаем  $\{x_i^+\}_{\alpha_{op}}$ , а также соответствующее  $f(\{x_i^+\}_{\alpha_{op}})$  – прогнозируемый оптимальный четкий доход.

Таким образом, на основе исходной нечетко-интервальной постановки задачи оптимизации портфеля ценных бумаг получает вполне четкое итоговое решение.

Рассмотрим более общий подход к решению задачи (4.19), (4.20).

При этом будут использоваться результаты рассмотренной выше приближенной методики, которую в связи с этим будем называть первым этапом решения задачи.

Пусть  $x_i$  – четкое число и  $d(\bar{f}(x))$  – четкое значение, например, эффективной ширины нечеткого интервала  $\bar{f}(x)$  (или меры его нечеткости). В принципе, можно использовать сразу несколько показателей, характеризующих степень неопределенности нечетко-интервальных данных.

Пусть  $m(\bar{f}(x))$  аналог математического ожидания (применительно к нечетко-интервальным распределениям):  $m = \int \bar{f}(x) \mu(f) df / \int \mu(f) df$ , где  $\mu(f)$  – функция принадлежности нечеткому интервалу  $\bar{f}(x)$ . На основе  $d$  и  $m$  можно построить функции  $\hat{i}_1(m)$  – критерий максимума дохода и  $\hat{i}_2(d)$  – критерий минимума риска.

Пусть  $\beta_1$  и  $\beta_2$  – ранги этих критериев. Тогда требуется решить задачу

$$\{x_i\}_{op} = \arg \max_{\{x_i\}} (\min(\mu_1^{\beta_1}(m(\bar{f}\{x_i\})), \mu_2^{\beta_2}(d(\bar{f}\{x_i\}))), \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Полученная задача нелинейного программирования решается с большими трудностями из-за ограничения  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Поэтому целесообразно использовать метод штрафных функций. Введем для этого штрафную функцию

$$D(\bar{X}) = \exp\left(-k \left|1 - \sum_{i=1}^n x_i\right|\right), \quad 0 \leq D(\bar{X}) \leq 1.$$

Тогда задача переформулируется в виде:

$$\{x_i\}_{op} = \arg \max_{\{x_i\}} (\min(\mu_1^{\beta_1}, \mu_2^{\beta_2}, D)), \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

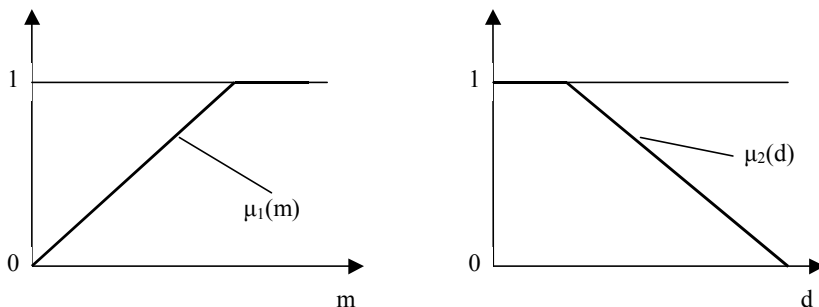


Рис.4.9. Функции желательности частных критериев

Чтобы сузить области поиска решений целесообразно использовать в качестве ограничений для  $x_i$  интервалы оптимальных решений, полученные на первом этапе решения задачи, описанном выше.

Остается проблема конкретизации функций  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

За основу возьмем промежуточные результаты первого этапа решения задачи.

Тогда можно принять, что  $t$  должно находиться в области допустимых оптимальных значений, откуда следует:  $\mu_1(m) = \lambda_j(m)$ .

Далее, можно утверждать, что максимальная ширина интервала  $d$  не может быть больше ширины интервала  $[f_{opo}^-, f_{opo}^+]$ , т.е. не выше ширины интервала нулевого  $\alpha$ -уровня допустимых решений.

В этом случае для  $\mu_2(d)$  получим функцию, представленную на рис. 4.10.

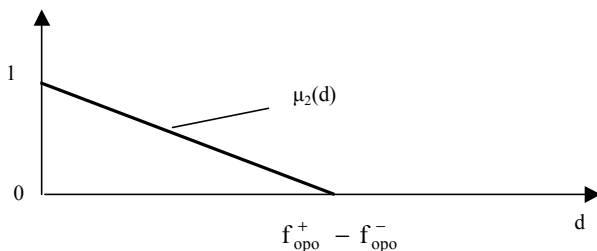


Рис. 4.10. Построение функции желательности  $\mu_2(d)$

Представленная двухэтапная методика решения задачи оптимизации портфеля ценных бумаг в условиях нечетко-интервальной неопределенности не намного сложнее в реализации, чем классические задачи на основе теоретико-вероятностной трактовки неопределенностей.

## ЛЕКЦИЯ 5. СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ФИНАНСОВОГО РЫНКА

Цель анализа финансового рынка – разработка рекомендаций для инвесторов, в какие ценные бумаги вкладывать капитал и в каком количестве. Выше было рассмотрено решение задачи оптимального выбора портфеля ценных бумаг, однако оно носило формальный характер, поскольку опиралось на предположение о том, что эффективности вложений являются случайными величинами с заданными вероятностными характеристиками. Фактически требуется знание вектора математических ожиданий и матрицы ковариаций эффективностей.

### 5.1. Прямой статистический подход к прогнозированию стоимости ценных бумаг на основе исследования истории рынка. Основы метода ведущих факторов

В развитых странах регулярно публикуются сведения о биржевом курсе ценных бумаг, прежде всего акций ведущих компаний. Таким образом, можно проанализировать последовательности, отражающие историю курсов и выплачиваемых дивидендов за достаточно длительный пери-

од. Имея эти данные, можно построить последовательности реальных эффективностей ценных бумаг за каждый квартал согласно определению:

Если  $R^{(t)}$  – эффективность ценных бумаг  $j$ -го вида за период  $t$ , то она равна

$$R_j^{(t)} = \frac{C_j^{(t+1)} + d_j^{(t)} - C_j^{(t)}}{C_j^{(t)}}, \quad (5.1)$$

где  $C^{(t)}$  – цена в начале периода  $t$ ,  $d^{(t)}$  – дивиденды за период  $t$ .

Квартал выбран в качестве единицы времени, поскольку данные о выплате дивидендов принято публиковать ежеквартально.

В действительности теоретическая формула (5.1) должна быть уточнена. Следует учесть, что цена покупки (bid price) и цена продажи (ask price) различны, даже если эти операции относятся к одному и тому же периоду времени. Именно эта разность (bid-ask spread) составляет основной источник заработка профессионального торговца акциями (дилера). Эффективность вклада должна оцениваться по общему итогу операции, состоящей из покупки у дилера ценных бумаг по цене  $\bar{C}_j^{(t)}$  (ask price начала периода), получения дивиденда за период и продажи в конце периода (начале следующего) по цене  $C_j^{(t)}$  (bid price), которая ниже ask price того же момента  $\bar{C}_j^{(t)}$  на установленный для данного типа ценных бумаг процент (в среднем  $\sim 1\%$ , но для акций крупных компаний процент ниже, а для мелких выше, что отражает трудоемкость сбыта менее солидных ценных бумаг). Таким образом, уточненная формула имеет вид:

$$R_j^{(t)} = \frac{C_j^{(t+1)} + d_j^{(t)} - \bar{C}_j^{(t)}}{\bar{C}_j^{(t)}}. \quad (5.2)$$

Предположим, что ряды таких данных подготовлены соответствующей информационной службой. Теперь необходимо связать их с принятой ранее теоретической моделью, в которой эффективности трактовались как случайные величины.

Логически простейший путь заключается в следующем: предположим, что наблюдаемые последовательности  $\{R_j^{(t)}, t=1, \dots, T; j=1, \dots, n\}$  являются реализациями, выборками из совокупности случайных величин  $\{R_j\}$ , и, более того, значения эффективностей в будущем ( $t > T$ ) также являются реализацией той же совокупности.

Эта гипотеза открывает принципиальную возможность статистической оценки параметров, характеризующих величины  $R_j$ . Эти оценки принято именовать «историческими» (historical) или «архивными», поскольку они строятся на основе истории ценных бумаг, данные о которых хранятся в компьютерных архивах финансовых аналитиков.

В соответствии с правилами статистики можно ввести оценки математических ожиданий как средних по выборкам:

$$\bar{m}_j^T = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_j^{(i)}, \quad (5.3)$$

$$V_j^T = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (R_j^{(i)} - \bar{m}_j^T)(R_j^{(i)} - \bar{m}_j^T). \quad (5.4)$$

Реальные цифры таковы. Число ведущих компаний, акции которых котируются на биржах США и составляют основную (по общей стоимости) часть рынка, обычно оценивается в  $n = 500$  (такое число учитывается в наиболее популярном издании «Standard and Poor's Index»). Длительность ежеквартальных временных рядов, имеющих смысл для статистической обработки,  $T=100$  (экономические условия и даже сам список ведущих компаний за период более 25 лет слишком сильно изменяются, чтобы столь устаревшие данные считать представляющими ту же генеральную совокупность). Таким образом, общий объем информации составляет  $5 \cdot 10^4$  чисел. Оценке же подлежат  $n$  величин  $m_j$  и  $n(n+1)/2$  различных величин  $V_{ij}$ . При  $n = 500$  получаем, что требуется оценить более  $10^5$  величин  $V_{ij}$ , т. е. больше, чем исходных данных. Поэтому оценки ковариаций окажутся заведомо неточными.

В силу этого обстоятельства прямой статистический подход используется только для вычисления оценок  $m_j$ , а также для оценки ковариаций между «самими главными» акциями в небольшом количестве, например в количестве 30, на базе которых выводится знаменитый индекс Доу-Джонса. При этом число данных – 3000, а число оцениваемых величин – 500, что не так уж плохо.

Однако финансовый аналитик обязан давать рекомендации не только по немногим ведущим, а по возможно большому числу компаний, выдвигающих свои ценные бумаги на



рынок (например, наиболее подробный в США Wilshire Index учитывает 5000 видов ценных бумаг).

В экономической жизни все взаимосвязано, но есть факторы, которые влияют сразу на все показатели. Например, уровень цен на ближневосточную нефть влияет на котировку акций почти всех компаний США, поскольку эта нефть покрывает более половины энергетических потребностей США. Если цена на нефть поднимется, то станет дороже бензин для автомобилей, уменьшится спрос на бензин, на сами автомобили, на металл для их изготовления, повысятся цены на сельскохозяйственные продукты, поскольку затраты на топливо – основной компонент их себестоимости.

Рассмотрим один из таких ведущих факторов, не определяя пока его природу. Обозначим его  $F$  и будем считать, что эффективности всех вложений зависят от него. Простейшая форма зависимости – линейная, так что примем гипотезу

$$R_j = a_j + b_j F. \quad (5.5)$$

Проверим эту гипотезу и оценим значения величин  $a_j$ ,  $b_j$  при помощи простейшей процедуры – метода наименьших квадратов.

Нанесем на диаграмму (рис. 5.1) точки с координатами  $R_j^{(t)}$  – эффективности и  $F^{(t)}$  – ведущего фактора за период  $t$ . Проведем прямую с минимальной суммой квадратов отклонений. Тангенс угла наклона на этой прямой даст оценку  $\hat{b}_j$  коэффициентов  $b_j$ , а отрезок, отсекаемый ею на оси  $R_j$ , даст оценку  $\hat{a}_j$  ожидаемого значения  $j$ -го случайного коэффициента  $a_j$ .

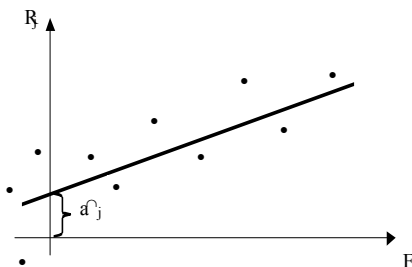


Рис. 5.1. Линейная аппроксимация зависимости между исходными данными

Формальная процедура построения такой прямой приводит к следующим простым формулам:

где 
$$\hat{b}_j = \frac{\hat{V}_{F_j}}{\hat{V}_F}, \quad \hat{a}_j = \hat{m}_j - \hat{b}_j \hat{m}_F, \quad (5.6)$$

$$\hat{m}_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_j^{(t)}, \quad \hat{m}_F = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T F^{(t)},$$

$$\hat{V}_{F_j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (F^{(t)} - \hat{m}_F)(R_j^{(t)} - \hat{m}_j); \quad \hat{V}_F = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (F^{(t)} - \hat{m}_F)^2, \quad (5.7)$$

т.е.  $\hat{m}_j, \hat{m}_F$  – статистические оценки ожидаемых значений эффективности  $R$  и фактора  $F$ ,  $\hat{V}_{F_j}$  – оценки ковариации эффективности и фактора, а  $\hat{V}_F$  – оценка вариации самого фактора.

Если гипотеза верна, то все отклонения от прямой вверх и вниз действительно являются случайными, и если в будущем возникнет новая ситуация, новая пара величин  $R_j^{(t)}, F^{(t)}$ , то соответствующая точка расположится где-то в окрестности прямой.

Средний квадрат отклонений от прямой, найденный по истории ценной бумаги, дает оценку вариации  $a_j$ , которую назовем  $V_{e_j}$ . Такие расчеты можно провести по всем интересующим видам ценных бумаг.

Если ведущий фактор выбран удачно, то его влиянием определяются все случайные колебания эффективности, а собственные случайные отклонения  $e_j$  от детерминированной линейной связи оказываются взаимно некоррелированными. Таким образом, приходим к уточненной гипотезе

$$R_j = \bar{a}_j + b_j F + e_j, \quad (5.8)$$

где  $e_j$  удовлетворяют условию отсутствия корреляции

$$E\{e_i, e_j\} = 0, \text{ при } i \neq j, \quad (5.9)$$

причем уже было введено обозначение для вариации «собственных» случайностей

$$Ve_j = E\{e_j^2\}, \quad (5.10)$$

взвешенных с учетом акционерного капитала каждой корпорации.

Таким образом, при рассмотрении  $n$  ценных бумаг подлежат оценке  $n$  величин  $a_j$ ,  $n$  величин  $b_j$ ,  $n$  собственных вариаций  $Ve_j$ , а также ожидаемое значение и вариация самого фактора  $m_F$  и  $V_F$  итого  $3+2n$  параметров.

Оценить такое количество по  $(n+1)T$  значениям, содержащимся в историях (за  $T$  периодов) ведущего фактора и всех ценных бумаг, значительно проще и надежнее, чем напрямую оценивать  $n+(n+1)n/2$  величин  $m_j$ ,  $V_{ij}$  как это досталось ранее. Вместе с тем нетрудно убедиться, что все величины  $m_j$ ,  $V_{ij}$  можно вычислить, зная указанные параметры:

$$m_j = \bar{a}_j + b_j m_F, \quad (5.11)$$

$$V_{ij} = \begin{cases} Ve_j + b_j^2 V_F, & i = j \\ b_i b_j V_F, & i \neq j \end{cases}. \quad (5.12)$$

Следует, конечно, помнить, что все это упрощение опирается на принятую гипотезу (5.8).

## 5.2. Общая эффективность рынка как ведущий фактор.

### Статистика рынка и ее использование при прогнозировании цен на акции

Сам рынок указывает путь выделения ведущих факторов, определяющих его поведение. Главным «барометром», позволяющим предсказывать судьбу всех ценных бумаг на рынке, является ситуация на рынке в целом, отражаемая в сводных индексах Доу-Джонса или более детальном Standard and Poor's Index (SP 500 Index). Наиболее важен для аналитиков SP 500 Index, представляющий собой сумму курсов 500 важнейших видов ценных бумаг, взвешенных с учетом акционерного капитала каждой корпорации.

В теории финансового рынка аналогичную роль играет величина, именуемая эффективностью рынка  $R_m$ . Она представляет собой взвешенную (с учетом капитала) сумму эффективностей всех рисковых ценных бумаг, фигурирующих на рынке.

На практике невозможно следить за поведением всех ценных бумаг, поскольку каждый год возникают и распадаются десятки тысяч микрокорпораций. Поэтому рассмотрению подлежат только истории тех ценных бумаг, которые на протяжении достаточно длительного периода фигурируют на торгах и которые имеют вес, достаточно существенный для рынка.

Опыт расчетов, длительное время осуществляемых финансовыми аналитиками, показывает, что именно эффективность рынка является наиболее важным ведущим фактором. Таким образом, основная гипотеза зависимости эффективностей ценных бумаг от ведущего фактора принимает вид

$$R_j = \bar{a}_j + b_j R_m + e_j, \quad (5.13)$$

откуда, в частности, следует, что

$$m_j = \bar{a}_j + b_j m_m, \quad (5.14)$$

$$V_j = V e_j + b_j^2 V_m, \quad V_{ij} = b_i b_j V_m, \quad i \neq j, \quad (5.15)$$

где  $m_m$  – ожидаемая эффективность рынка, а  $V_m$  – вариация его эффективности.

Обычно в этом случае вместо  $b_j$  используют  $\beta_j$ . Эти коэффициенты играют важнейшую роль в практике финансового анализа и именуются «бета ценных бумаг вида  $j$  относительно рынка» или «бета  $j$ -го вклада». Они являются коэффициентами, определяющими влияние общей ситуации на рынке на судьбу каждой ценной бумаги. Если  $\beta_j$  положительна, то эффективность ценной бумаги аналогична эффективности рынка; если  $\beta_j$  отрицательна, то эффективность  $j$ -й ценной бумаги будет снижаться при возрастании эффективности рынка.

Из (5.15) следует также, что вариация эффективности каждой ценной бумаги состоит из двух слагаемых: «собственный» компонент, не зависящий от поведения рынка, и «рыночный» компонент, определяемый тем, насколько случайным является поведение рынка в целом. Их отношение

$$\beta_j^2 V_m / V e_j \quad (5.16)$$

часто обозначается  $\bar{R}_j^2$  (*R-squared*) и характеризует долю риска данного вклада, вносимую неопределенностью рынка в целом. Она тем выше, чем выше бета этого вклада.

С другой стороны, из (5.14) следует, что чем больше бета, тем больше и ожидаемая эффективность по сравнению с эффективностью рынка. Таким образом, рост «рыночного» компонента риска морально компенсируется ростом ожидаемой эффективности. В то же время «собственный» компонент связан лишь с «чистым» риском без всякой компенсации. Поэтому в какой-то мере предпочтительнее те вклады, для которых *R-squared* больше.

Удобно отсчитывать эффективность от эффективности безрискового вклада  $r_0$ . Превышение над безрисковой эффективностью называют премией за риск. Перепишем (5.14) в виде

$$m_j - r_0 = \beta_j (m_m - r_0) + \alpha_j, \quad (5.17)$$

где  $\hat{\alpha}_j = \hat{a}_j - \hat{a}_j r_0$ .

Таким образом, премия за риск каждого вклада линейно зависит от премии за риск, складывающейся на рынке в целом.

Оценка параметров, входящих в основную модель, т.е.  $a_j$ ,  $\beta_j$ ,  $R_j^2$  представляет собой статистическую проблему. Основной путь ее решения следующий: поскольку эффективность рынка  $R_m$  принята за ведущий фактор *F*, то можно использовать описанную ранее процедуру оценки с помощью метода наименьших квадратов. Он будет применяться к наблюдавшимся в прошлом последовательностям эффективностей  $R_j^{(t)}$ ,  $R_m^{(t)}$  каждой ценной бумаги и рынка в целом.

Учитывая (5.17), запишем выражение для оценок

$$\beta_j = \frac{\bar{V}_{m_j}}{\bar{V}_m}, \quad \alpha_j = \bar{a}_j - \beta_j r_0 = \bar{m}_j - \beta_j (\bar{m}_m - r_0), \quad (5.18)$$

где  $\bar{m}_j, \bar{m}_m$  – средние значения наблюдавшихся эффективностей  $R^{(t)}$ ,  $R^{(t)}$ ,  $\bar{V}_m$  – оценка вариации эффективности рынка,  $\bar{V}_{m_j}$  – оценка ковариаций эффективности рынка и каждой ценной бумаги.

$$\bar{V}_m = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_m^{(t)} - \bar{m}_m)^2, \quad \bar{V}_{m_j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_m^{(t)} - \bar{m}_m)(R_j^{(t)} - \bar{m}_j), \quad (5.19)$$

Здесь  $T$  – число обрабатываемых наблюдений.  
Для вычисления  $R_j^2$  используется формула

$$\bar{R}_j^2 = \beta_j^2 - \frac{\bar{V}_{m_j}}{\bar{V}_{e_j}}, \quad (5.20)$$

где – средний квадрат отклонений от приближающей прямой:

$$\bar{V}_{e_j} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^T (R_j^{(t)} - \bar{a}_j - \beta_j R_m^{(t)})^2, \quad (5.21)$$

интерпретируемый как оценка «собственных» вариаций.

Все приведенные оценки основываются только на истории рынка. Для ценных бумаг США расчеты проводятся регулярно. В качестве характеристики рынка в целом, как правило, используется SP 500 Index. Ежемесячно составляются отчеты с таблицами, где для каждой из 500 фирм указаны вычисленные оценки величин бета, альфа,  $R$ -squared, «собственных» вариаций  $\bar{V}_{e_j}$  (точнее,  $\sqrt{\bar{V}_{e_j}}$ , называемых остаточными стандартными отклонениями в процентах). Указываются также характеристики точности оценок бета и альфа. В качестве истории ценных бумаг используются данные за последние 5 лет.

При более частой, чем раз в квартал, выборке невозможно непосредственно учесть роль дивидендов в оценке текущей эффективности. Однако практика статистического анализа рынка США показала, что оценки бета слабо изменятся, если принять

во внимание только эффективность, связанную с колебаниями курса, т.е. изъять из формулы для расчета  $R_j^{(t)}$  величины  $d_j^{(t)}$ .

В этих таблицах также вычисляется величина, именуемая «приспособленная бета»,  $\beta_{adj}$ , вычисленная по формуле

$$\beta_{adj} = 0.66\hat{\beta} + 0.34 \cdot 1,0 . \quad (5.22)$$

Такое приспособление позволяет улучшить прогнозирующие свойства исторической оценки бета ( $\beta$ ) и основывается на гипотезе, что поведение акций, длительно котируемых на рынке, имеет тенденцию постепенно приближаться к поведению рынка в целом, т.е.  $\beta$  приближается к 1. Вместе с тем это положение остается дискуссионным.

Более эффективным является введение поправок к «историческим» бета на основе анализа влияния других факторов.

Статистические исследования рынка США показали, например, что эффективной является формула

$$\beta_j = k_0 + k_1\beta_j + k_2S_j, \quad (5.23)$$

где  $k_0$  – число, зависящее от того, к какому сектору экономики принадлежит данная корпорация (например, 0,45 для базовых отраслей и 0,25 — для транспорта),  $k_1$  равно 0,58, а коэффициент  $k_2$ , отражающий влияние размера  $S_j$  компании на оценку бета, отрицателен и равен 0,1. При этом размер  $S_j$  вычислялся как десятичный логарифм суммарной стоимости акций, выраженной в млн. долл. (например, для компании с капиталом 100 млн долл. принимается  $S_j = 2$ ). Формула (5.23) свидетельствует, что зависимость акций от поведения рынка различна в различных отраслях (например, снижение общей эффективности рынка влияет на курс акций транспортных компаний слабее, чем на курс акций компаний, работающих в базовых отраслях) и что курс акций более крупных компаний менее чувствителен к колебаниям эффективности рынка.

Формулы типа (5.22), (5.23) – лишь частные случаи более общего подхода, в котором исторические данные корректируются с помощью дополнительной информации о перспективах работы корпораций-эмитентов.

### **5.3. Равновесие на конкурентном финансовом рынке. Основное уравнение равновесия финансового рынка. Модель ценообразования на рынке капитальных вложений**

Исследование того, как взаимодействие спроса и предложения приводит к равновесию на конкурентном рынке, является одной из главных целей экономики как науки. Однако классическая теория равновесия, излагаемая в учебниках по микроэкономике, непригодна для изучения процессов на рынке ценных бумаг, т.к. она не учитывает роли неопределенности, фактора риска. Вместе с тем именно возможность риска определяет рациональные действия субъектов рынка ценных бумаг, принимаемые ими решения, а следовательно, и уровень цен на рынке.

Поэтому в 60-е г. были созданы основы принципиально новой теоретической модели равновесия, названной моделью ценообразования на рынке капиталовложений (Capital Asset Pricing Model, CAPM). В настоящее время теория финансового рынка детально разработана. Опишем только ее качественные аспекты.

Введем понятие «идеальный конкурентный рынок», т.е. рынок, все участники которого располагают одинаковой информацией и принимают на ее основе наилучшие, оптимальные решения. Уточним эти представления.

Полная и одинаковая информированность означает, что все участники рынка ознакомлены со статистическим прогнозом эффективностей всех ценных бумаг на рынке, выраженном в виде ожидаемых значений, вариаций и ковариаций; оптимальность означает, что любой участник рынка стремится сформировать оптимальную структуру своего портфеля ценных бумаг.

В соответствии с выводом Д.Тобина, структура рисковой части оптимального портфеля не зависит от склонности инвестора к риску и полностью определяется вероятностными характеристиками рисковых ценных бумаг. Отсюда следует, что, опираясь на одинаковую информацию, все инвесторы будут стремиться выбрать одну и ту же структуру рисковой части своего портфеля, например, иметь в нем 6% (по стоимости!) акций IBM, 3% акций Exxon, по 2% акций General Elec. и General Motors и т.д. Совокупный спрос инвесторов



будет предъявлен рынку, но доли акционерного капитала корпораций и их долговых обязательств, предложенные к продаже, могут не соответствовать спросу. Тогда вступают в действие законы конкурентного рынка: курс ценных бумаг, спрос на которые превышает предложение, будет расти, а курс ценных бумаг, спрос на которые ниже предложения, начнет снижаться.

При этом эффективности первых ценных бумаг увеличатся, а вторых уменьшатся. Более того, ценовые реакции рынка, который насчитывает множество участников, не являются однозначно прогнозируемыми: курсы колеблются, и притом по-разному, вызывая изменение оценок ожидаемых значений и ковариаций отклонений от них. На основании информации об этом каждый инвестор скорректирует структуру своего рискованного портфеля, а следовательно, изменится структура совокупного спроса. При этом должно отреагировать и предложение, т.е. рискованные ценные бумаги, которые не пользуются спросом, исчезнут с рынка.

В результате на рынке может установиться равновесие спроса и предложения, при котором совокупная масса всех рискованных ценных бумаг распределится между инвесторами в полном соответствии с их оптимизирующими устремлениями.

К сожалению, теория пока не в состоянии описать динамику процесса прихода к равновесию из произвольного начального состояния, а лишь констатирует, что такое равновесие возможно.

Из всего вышесказанного следует практически важный вывод: если на реальном рынке сложились условия, когда его поведение в течение длительного времени определяют участники, располагающие почти одинаковой информацией в одинаковом объеме, принимающие наилучшие возможные решения о формировании своего портфеля рискованных ценных бумаг, то на таком рынке распределение рискованных ценных бумаг по видам будет иметь свойства, близкие к свойствам оптимального портфеля.

Короче говоря, при формировании оптимального портфеля рискованных ценных бумаг надо довериться рынку и выбрать портфель с той же структурой, что и портфель рынка.

Если, например, в общей стоимости всех рискованных ценных бумаг акции IBM составляют 5,5%, то и инвестор должен

вложить 5,5% своего капитала, предназначенного для рискованных финансовых операций, в акции IBM.

Конечно, теория не может подсказать, как разделить капитал на рисковую и безрисковую части. Каждый инвестор решает эту проблему в зависимости от своей склонности к риску. Теория лишь позволяет доказать, что общий уровень цен на равновесном рынке зависит от склонности инвесторов к риску, и цены тем выше, чем выше эта склонность.

Теория равновесного рынка позволяет также лучше понять значение таких параметров, как альфа и бета вкладов относительно рынка. Поскольку согласно модели портфель рынка имеет ту же структуру, что и оптимальный портфель, вычисляемый на основе вероятностных характеристик эффективностей рискованных ценных бумаг, то рынок должен иметь свойства, присущие оптимальному портфелю.

Основное свойство оптимального портфеля было выражено соотношением:

$$m_j - r_0 = \hat{\alpha}_j (m_p - r_0),$$

т.е. премия за риск каждой ценной бумаги пропорциональна премии за риск портфеля в целом, а коэффициентом пропорциональности является бета ценной бумаги  $j$  относительно портфеля.

Теперь можно утверждать, что это соотношение верно и для рынка. Заменяя индекс портфеля  $p$  на индекс рынка  $m$ , запишем:

$$m_j - r_0 = \hat{\alpha}_j (m_m - r_0). \quad (5.24)$$

Вывод: премия за риск, связанный с любой ценной бумагой, пропорциональна премии за риск рынка в целом, а коэффициент пропорциональности есть бета ценной бумаги относительно рынка.

Соотношение (5.24) принято называть основным уравнением равновесного рынка. Зачастую используют и его графическое изображение.

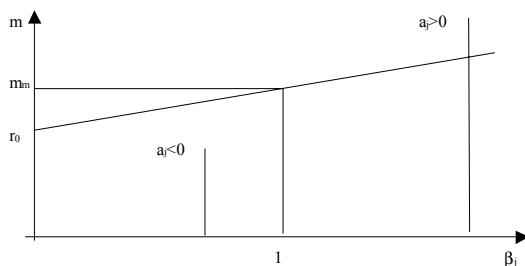


Рис. 5.2. Графическая интерпретация основного уравнения равновесного рынка

По оси абсцисс отложены величины бета, по оси ординат – ожидаемые эффективности ценных бумаг. Прямая именуется линией рынка ценных бумаг (Security market line, SML). Для идеального равновесного рынка задание бета позволяет найти ожидаемую эффективность в виде соответствующей точки на прямой.

О поведении реального рынка можно судить по статистическим данным. Напомним, что статистика указывает на справедливость более общего соотношения:

$$m_j - r_0 = \beta_j (m_m - r_0) + \alpha_j.$$

Оно отличается от основного уравнения CAPM наличием слагаемого, равного альфа вклада. Иначе говоря, на идеальном рынке альфа всех ценных бумаг равна нулю. Статистические же данные реального рынка не подтверждают этот вывод. Обычно приводят два объяснения этого противоречия.

Первое заключается в том, что на реальном рынке отнюдь не все участники одинаково информированы, и рациональность их поступков различна. Поэтому и портфель рынка должен отличаться от оптимального. Если статистика показывает, что альфа какой-нибудь ценной бумаги положительна, то это означает недооценку рынком действительных возможностей этой ценной бумаги. В противном случае ( $\alpha_j < 0$ ) считают, что рынок переоценивает возможности

ценной бумаги. Поэтому одна из практических рекомендаций финансового анализа – включение вкладчиком в портфель прежде всего тех ценных бумаг, которые недооценены рынком ( $\alpha_j > 0$ ), с надеждой «переиграть» рынок, получить преимущество перед менее информированными участниками.

На диаграмме точки, соответствующие недооцененным ценным бумагам, будут располагаться выше линии рынка, а точки, соответствующие переоцененным ценным бумагам, – ниже этой линии.

Вторая интерпретация отличия величин альфа от нуля менее практична, но, по-видимому, более соответствует реальности. САРМ базируется на простейшей теории оптимального портфеля, в которой допускается, что ставки при покупке и продаже, при выдаче и получении кредита одинаковы, что не соответствует действительности. Существуют различные модификации САРМ, учитывающие эти отклонения от идеального варианта.

#### РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Первозванский А.А., Первозванская Т.Н. Финансовый рынок: расчет и риск. – М.: Инфра-М, 1994.
2. Четыркин Е.М. Методы финансовых и коммерческих расчетов. – М.: Дело, 1992.
3. Инвестиционное проектирование: практическое руководство по экономическому обоснованию инвестиционных проектов/ Под ред. С.И. Шумилина. – М.: АО «Финстатинформ», 1995.
4. Риски в современном бизнесе/ Грабовый П.Г., Петрова С.И., Полтавцев К.Г. и др. – М.: «Аланс», 1994.
5. Глазунов В.Н. Финансовый анализ и оценка риска реальных инвестиций. – М.: АО «Финстатинформ», 1997.
6. Петраков Н.Я. Инвестиционно-финансовый портфель. – М.: «Соминтэк», 1993.
7. Шапиро В.Д. Управление проектами. –СПб.: «Два Три», 1993.
8. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: Наука, 1981.
9. Обработка нечеткой информации в системах принятия решений/А.Н. Борисов, А.В. Алексеев, Г.В. Меркурьева и др. – М.: Радио и связь, 1989.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
Лекция 1. Финансовый рынок и его товары.....	4
1.1. Товарно-денежный механизм рыночной экономики.....	4
1.2. Товары, субъекты и структура финансового рынка.....	8
1.3. Современное состояние финансового рынка в Республике Беларусь.....	10
Лекция 2. Характеристики финансовых операций.....	10
2.1. Основные термины и их толкование.....	10
2.2. Приведение к базовому периоду.....	12
2.3. Дисконтирование.....	14
2.4. Эффективная ставка.....	16
2.5. Оценка потоков платежей.....	19
2.6. Двухсторонний поток платежей. Чистая приведенная величина.....	21
Лекция 3. Финансовая математика в инвестиционном проектировании.....	24
3.1. Понятие об инвестициях в реальные активы. Классификация инвестиций. Роль инвестиций в увеличении ценности фирмы.....	24
3.2. Понятие о денежных потоках (cash flow). Подход бухгалтера и финансиста к оценке денежных потоков. Роль амортизации в инвестиционном проектировании.....	27
3.3. Основные составляющие бизнес-плана. Особенности бизнес-планирования в условиях инфляции. Особенности бизнес-планирования в условиях Республики Беларусь.....	30
3.4. Дисконтированные финансовые параметры инвестиций, методы их расчета и их роль в оценке эффективности инвестиционных проектов.....	66
3.5. Оценка дисконтированных финансовых параметров инвестиций в условиях неопределенности. Типы неопределенностей и взаимосвязь между ними.....	73

3.6. Основы интервальной и нечетко-интервальной математики..	82
3.7. Применение интервального и нечетко-интервального анализа для расчета параметров инвестиций.....	97
Лекция 4. Акции и организация торговли ценными бумагами...	115
4.1. Формирование цены акции. Прибыль и дивиденды. ММ-парадокс. Риск и ограничение риска. Финансовый риск. Хеджирование. Опционы и контракты на финансовом рынке.....	115
4.2. Портфель ценных бумаг. Эффективность ценных бумаг как случайная величина. Влияние склонность к риску лиц, принимающих решения.....	123
4.3. Основные понятия технического и фундаментального анализа на рынке ценных бумаг.....	126
4.4. Статистические характеристики портфеля ценных бумаг. Влияние корреляции между ценами различных видов акций на итоговую эффективность портфеля.....	140
4.5. Оптимизация портфеля ценных бумаг. Постановка и решение классической задачи оптимизации методом неопределенных множителей Лагранжа.....	145
4.6. Методы оценки риска портфеля ценных бумаг в рамках классического теоретико-вероятностного подхода к формализации неопределенностей.....	155
4.7. Методы оптимизация портфеля ценных бумаг в условиях нестатистической неопределенности на основе нечетко-интервальной математики.....	160
Лекция 5. Статистика и теория финансового рынка.....	166
5.1. Прямой статистический подход к прогнозированию стоимости ценных бумаг на основе исследования истории рынка. Основы метода ведущих факторов.....	166
5.2. Общая эффективность рынка как ведущий фактор. Статистика рынка и ее использование при прогнозировании цен на акции.....	171
5.3. Равновесие на конкурентном финансовом рынке. Основное уравнение равновесия финансового рынка. Модель ценообразования на рынке капитальных вложений.....	176

Узнайте стоимость написания студенческой работы на заказ

[Рерайт \(переделка\) дипломных и курсовых работ](http://учебники.информ2000.рф/papisat_diplom.shtml)

[Создание интернет-магазинов](#)

[Вернуться в каталог учебников](#)

*Повышайте квалификацию, приобретайте новые компетенции:*

[Курсы по созданию сайтов](#)

[Курсы по оптимизации сайтов](#)

[Сайт-визитка - начать бизнес в Интернете](#)

**Материалы по экономике и менеджменту:**

- для повышения квалификации преподавателей;
- для рефератов и контрольных;
- для самообразования топ-менеджеров.

**УЧЕБНИКИ, ДИПЛОМЫ, ДИССЕРТАЦИИ -**  
полные тексты

На сайте электронной библиотеки  
[www.учебники.информ2000.рф](http://www.учебники.информ2000.рф)

**НАПИСАНИЕ на ЗАКАЗ:**

1. Диссертации и научные работы
2. Дипломы, курсовые, рефераты, чертежи...
3. Школьные задания

Онлайн-консультации

ЛЮБАЯ тематика, в том числе ТЕХНИКА

Приглашаем авторов

Вернуться в каталог учебников

<http://учебники.информ2000.рф/учебники.shtml>